Н.М. МЕЛАМЕДМАН

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

1 ЧАСТЬ

Н. М. МЕЛАМЕДМАН

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ТЕХНИКОВ-ПРОГРАММИСТОВ

ч. I

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Допущено МВ и ССО РСФСР
в качестве учебника для техникумов
по специальности
«Программирование для быстродействующих
математических машин»

МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1974

517
М47
УДК 516+517 (075)

Рецензенты:

доцент **Я. М. Шабловский**
и **Г. Б. Шнайдер** (Московский приборостроительный техникум).

Меламедман Н. М.

М47 Курс высшей математики для техников-программистов. Ч. I. Аналитическая геометрия. Введение в математический анализ. Учебник для техникумов. М., «Высш. школа», 1974.

271 с. с ил.

Учебник написан в соответствии с программой по математике для техников-программистов. Часть I включает аналитическую геометрию и введение в математический анализ. Перечень тем охватывает весь материал, необходимый будущим программистам в их практической деятельности при решении инженерно-технических задач.

Приведено достаточное количество примеров, сопровождающихся подробными решениями, включены задачи для самостоятельного решения. Материал иллюстрируется множеством рисунков.

Предназначается для учащихся средних специальных учебных заведений.

М $\frac{20203\text{-}095}{001\,(01)\text{-}74}$ 248-74 **517**

© Издательство «Высшая школа», 1974

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Предисловие 6

Глава I. **Прямоугольные координаты на плоскости**

§ 1. Ось. Числовая ось 7
§ 2. Система прямоугольных координат на плоскости 11
§ 3. Полярная система координат 14
§ 4. Расстояние между двумя точками на плоскости 17
§ 5. Вычисление площади треугольника 19
§ 6. Деление отрезка в данном отношении 23
§ 7. Преобразование прямоугольных координат при параллельном сдвиге осей 27
§ 8. Преобразование прямоугольных координат при повороте осей 28
§ 9. Преобразование прямоугольных координат при изменении начала координат и повороте осей 30

Глава II. **Прямая линия**

§ 1. Понятие уравнения линии 32
§ 2. Уравнение прямой линии с угловым коэффициентом 35
§ 3. Общее уравнение прямой 38
§ 4. Уравнение прямой в отрезках 40
§ 5. Угол между двумя прямыми 42
§ 6. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых 43
§ 7. Взаимное расположение двух прямых на плоскости 45
§ 8. Уравнение пучка прямых 47
§ 9. Нормальное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой 49
§ 10. Уравнение прямой в полярной системе координат 52

Глава III. **Кривые второго порядка**

§ 1. Окружность 54
§ 2. Эллипс. Эксцентриситет и директрисы эллипса 56
§ 3. Гипербола. Асимптоты. Эксцентриситет и директрисы гиперболы 62
§ 4. Парабола. Эксцентриситет и директриса параболы 70

Глава IV. **Метод координат в пространстве. Элементы векторной алгебры**

§ 1. Прямоугольная система координат в пространстве 75
§ 2. Определители второго порядка 77
§ 3. Определители третьего порядка 79
§ 4. Определители n-го порядка и их свойства 81
§ 5. Разложение определителя n-го порядка по элементам строки или столбца 89
§ 6. Решение системы n линейных уравнений с n неизвестными. Правило Крамера 94
§ 7. Понятие вектора. Проекции вектора на ось 98
§ 8. Проекции вектора на оси координат 99
§ 9. Направляющие косинусы 102

§ 10. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении 103
§ 11. Линейные операции над векторами. Основные свойства линейных операций 107
§ 12. Основные теоремы о проекциях векторов 111
§ 13. Разложение вектора на составляющие 114
§ 14. Скалярное произведение векторов и его свойства 115
§ 15. Векторное произведение векторов и его свойства 119
§ 16. Смешанное произведение трех векторов 124

Глава V. **Плоскость и поверхности второго порядка**

§ 1. Понятие об уравнении поверхности 128
§ 2. Плоскость (поверхность первого порядка) 130
§ 3. Уравнение плоскости в отрезках 133
§ 4. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости 134
§ 5. Уравнение плоскости, проходящей через одну и три данные точки 137
§ 6. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей 139
§ 7. Уравнения линии. Уравнения прямой в пространстве 140
§ 8. Угол между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых 144
§ 9. Угол между прямой и плоскостью. Условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости 146
§ 10. Цилиндрическая поверхность 148
§ 11. Эллипсоид 150
§ 12. Гиперболоиды 153
§ 13. Параболоиды 158
§ 14. Конус второго порядка 162

Глава VI. **Элементарные функции**

§ 1. Понятие функции 165
§ 2. Способы задания функций 167
§ 3. Классификация функций 170
§ 4. Линейная функция. Прямая и обратная пропорциональная зависимость. Квадратичная функция 172
§ 5. Обратная функция 173
§ 6. Элементарные функции 175

Глава VII. **Теория пределов. Непрерывность функций**

§ 1. Предел функции 183
§ 2. Предел последовательности 186
§ 3. Бесконечно малые величины и их основные свойства 188
§ 4. Бесконечно большие величины и их связь с бесконечно малыми 191
§ 5. Правила предельного перехода 194
§ 6. Признаки существования предела функции 199
§ 7. Два замечательных предела. Число *e*. Натуральные логарифмы. Экспоненты 200
§ 8. Сравнение бесконечно малых величин. Эквивалентные бесконечно малые величины 210
§ 9. Применение отношений бесконечно малых величин к нахождению пределов и приближенным вычислениям 213
§ 10. Односторонние пределы 216
§ 11. Непрерывность функции 218
§ 12. Действия над непрерывными функциями 221
§ 13. Точки разрыва 223
§ 14. Свойства непрерывных функций 226

Глава VIII. **Производная и дифференциал функции**

§ 1. Понятие производной 228
§ 2. Дифференцирование результатов арифметических действий . . 233
§ 3. Дифференцирование сложной и обратной функций 236
§ 4. Производные основных элементарных функций 238
§ 5. Логарифмическое дифференцирование. Производные неявных функций 247
§ 6. Производные параметрически заданных функций 250
§ 7. Дифференциал функции 253
§ 8. Правила вычисления дифференциалов 257
§ 9. Производные и дифференциалы высших порядков 261

Предметный указатель 267

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс высшей математики наравне с курсами вычислительной математики и программирования для электронных вычислительных машин является основной специальной дисциплиной для техников-программистов.

Программа Министерства высшего и среднего специального образования РСФСР по специальности «Программирование для быстродействующих математических машин» предусматривает широкое изложение общего курса высшей математики. Это вызвано спецификой работы будущих техников-программистов, которые сталкиваются с необходимостью решения весьма сложных математических задач и постановке их на ЭВМ.

Курс высшей математики для программистов по своему объему и характеру излагаемого материала разделен на две самостоятельные книги: общий курс (в двух частях), включающий аналитическую геометрию и математический анализ, и специальный курс, включающий дифференциальные уравнения и краевые задачи. Усвоение общего курса является основой для изучения специального курса высшей математики, содержащего наиболее трудные для понимания разделы, знание которых необходимо в вычислительной практике.

Настоящая книга — первая попытка создания учебника по курсу высшей математики для программистов среднего звена. Перечисленные особенности оказали влияние на методику изложения материала. Теоретический материал дается с подробными выводами и многочисленными примерами. Приводятся задачи для самостоятельного решения. Кроме того, для удобства пользования книгой в конце ее помещен предметный указатель.

ГЛАВА I

ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. ОСЬ. ЧИСЛОВАЯ ОСЬ

Очевидно, что произвольная прямая имеет два взаимно противоположных направления. Назовем одно из них *положительным*, а противоположное — *отрицательным*.

Прямая, на которой указано положительное направление, называется *осью*. На рисунках положительное направление оси указывается стрелкой.

Пусть дана произвольная ось и, кроме того, указан масштаб, т. е. линейная единица, с помощью которой любой отрезок может быть измерен (определена его длина). Возьмем на оси две произвольные точки A_1 и A_2.

Отрезок, ограниченный точками A_1 и A_2, называется *направленным*, если известно, какая из этих точек считается началом отрезка и какая — концом. Направлением отрезка считается направление от начала к концу.

Условимся направленный отрезок обозначать двумя буквами с чертой сверху, именно теми же буквами, которыми помечены ограничивающие его точки. На первом месте ставится буква, обозначающая начало отрезка. Таким образом, запись $\overline{A_1A_2}$ обозначает направленный отрезок, ограниченный точками A_1 и A_2, началом которого является точка A_1; $\overline{A_2A_1}$ — направленный отрезок, ограниченный точками A_1 и A_2, началом которого является точка A_2.

При рассмотрении направленных отрезков для краткости будем называть их просто отрезками. *Величиной отрезка* $\overline{A_1A_2}$ некоторой оси называется число, равное его длине, взятое с определенным знаком; при этом знак выбирается положительный, если направление отрезка совпадает с положительным направлением оси, и отрицательный, если направление отрезка противоположно положительному направлению оси.

Величина отрезка $\overline{A_1A_2}$ обозначается символом A_1A_2 (без черты).

Отрезок $\overline{A_1A_2}$ называется *нулевым*, если точки A_1 и A_2 совпадают, так как величина его A_1A_2 равна нулю.

Необходимо различать понятия величины отрезка и его длины. Величина отрезка есть число относительное, а длина отрезка представляет собой модуль его величины. Таким образом, в соответствии с принятым в алгебре обозначением модуля числа для обозначения длины отрезка $\overline{A_1A_2}$ будет употребляться символ $|A_1A_2|$. Очевидно, что $|A_1A_2|$ и $|A_2A_1|$ обозначают одно и то же число.

Напротив, величины A_1A_2 и A_2A_1 отличаются знаком, т. е. $A_1A_2 = -A_2A_1$.

На рис. 1.1 изображены ось a и на ней точки A_1, A_2, A_3, A_4. Величина E_1E_2 представляет собой масштабный отрезок. Расстояние между точками A_1 и A_2 равно трем единицам, между точками A_3 и A_4 — четырем единицам масштаба. Направление от точки A_1 к точке A_2 совпадает с положительным направлением оси, направление от точки A_3 к точке A_4 противоположно положительному направлению оси. Следовательно, в данном случае $A_1A_2 = 3$, $A_3A_4 = -4$ или $A_2A_1 = -3$, $A_4A_3 = 4$. Кроме того, можно написать $|A_1A_2| = 3$, $|A_3A_4| = 4$.

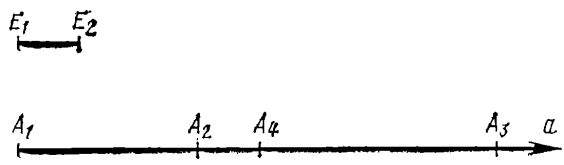

Рис. 1.1

Возьмем на некоторой оси три точки A_1, A_2, A_3, которые образуют отрезки $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$ и $\overline{A_1A_3}$. Величины этих отрезков связаны соотношением

$$A_1A_2 + A_2A_3 = A_1A_3. \qquad (1.1)$$

Докажем справедливость соотношения (1.1), учитывая, что точки A_1, A_2, A_3 могут быть расположены различным образом на оси.

1. Пусть отрезки $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_2A_3}$ (ненулевые) имеют одинаковое направление (рис. 1.2); тогда отрезок $\overline{A_1A_3}$ имеет длину, равную сумме длин отрезков $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_2A_3}$ и направлен одинаково с ними. Следовательно, все три числа A_1A_2, A_2A_3 и A_1A_3 имеют одинаковые знаки, а число A_1A_3 равно сумме чисел A_1A_2 и A_2A_3, т. е. соотношение (1.1) доказано.

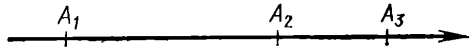

Рис. 1.2

2. Пусть отрезки $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_2A_3}$ (ненулевые) имеют разные направления (рис. 1.3); тогда отрезок $\overline{A_1A_3}$ имеет длину, равную разности длин отрезков $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, и направлен так же, как более длинный из них. В этом случае числа A_1A_2 и A_2A_3 имеют разные знаки, а число A_1A_3 имеет модуль, равный разности модулей чисел A_1A_2 и A_2A_3, причем знак числа A_1A_3 совпадает со знаком того из чисел A_1A_2 и A_2A_3, модуль которого больше. Следовательно, и в этом случае число A_1A_3 равно сумме чисел A_1A_2 и A_2A_3. Соотношение (1.1) доказано.

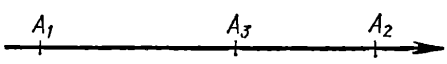

Рис. 1.3

Доказательство упростится, если предположить, что один из отрезков $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$ нулевой. Если $\overline{A_1A_2}$ — нулевой отрезок, то точка A_2 совпадает с точкой A_1, следовательно,

$$A_1A_2 + A_2A_3 = A_1A_1 + A_1A_3 = 0 + A_1A_3 = A_1A_3.$$

Если $\overline{A_2A_3}$ — нулевой отрезок, то точка A_2 совпадает с точкой A_3, следовательно,

$$A_1A_2 + A_2A_3 = A_1A_3 + A_3A_3 = A_1A_3 + 0 = A_1A_3.$$

Таким образом, соотношение (1.1) справедливо при любом расположении точек A_1, A_2, A_3 на оси.

Пользуясь соотношением (1.1), можно доказать, что при любом расположении на оси n точек A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}, A_n

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n = A_1A_n, \qquad (1.2)$$

т. е. *сумма величин отрезков, для которых начало каждого последующего отрезка совпадает с концом предыдущего, равна величине отрезка, начало которого совпадает с началом первого, а конец — с концом последнего отрезка.*

Положение точек на произвольно выбранной оси можно определять заданием чисел.

Возьмем произвольную ось a. На этой оси отметим буквой O некоторую фиксированную точку, относительно которой будем определять положение всех точек оси. Величина отрезка $\overline{OM}$ называется *координатой* точки M на оси a. Точка O называется *началом координат*. Координата точки O на оси a равна нулю. Положение любой точки M на этой оси вполне однозначно определяется отрезком $\overline{OM}$. Так, модуль координаты, т. е. OM, есть расстояние точки M от точки O, а знак координаты указывает, в каком направлении от точки O расположена точка M. Если координата положительна, то точка M расположена в положительном направлении от точки O, если отрицательна — в отрицательном направлении, если же координата равна нулю, то точка M совпадает с точкой O. Так, на рис. 1.4 точка M_1 имеет положительную координату и расположена справа от начала координат, а точка M_2 имеет отрицательную координату и расположена слева от начала координат. Координату произвольной точки обозначают буквой x.

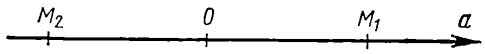

Рис. 1.4

Для того, чтобы показать, что данная точка имеет данную координату, эту координату записывают в круглых скобках рядом с обозначением самой точки, например, $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$, ..., $M_n(x_n)$.

Теорема 1. *Если $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ — любые две точки оси, то величина отрезка $\overline{M_1M_2}$ находится по формуле*

$$M_1M_2 = x_2 - x_1. \qquad (1.3)$$

Доказательство. На основании соотношения (1.1) имеем (см. рис. 1.4)

$$M_2M_1 = M_2O + OM_1,$$

откуда

$$M_2M_1 = -OM_2 + OM_1 \text{ и } M_1M_2 = OM_2 - OM_1.$$

Но $OM_2 = x_2$; $OM_1 = x_1$, следовательно, $M_1M_2 = x_2 - x_1$, что и требовалось доказать.

Таким образом, чтобы получить величину отрезка оси, нужно из координаты его конца вычесть координату начала.

Теорема 2. *Если* $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ — *любые две точки оси, то расстояние между ними находится по формуле*

$$d = |x_2 - x_1|. \qquad (1.4)$$

Доказательство. На основании соотношения (1.3) имеем $M_1M_2 = x_2 - x_1$. Так как расстояние между точками M_1 и M_2 или длина отрезка M_1M_2 есть модуль величины отрезка $\overline{M_1M_2}$, то $|M_1M_2| = |x_2 - x_1|$. Обозначая расстояние между точками M_1 и M_2 через d, получим $d = |x_2 - x_1|$, что и требовалось доказать.

Таким образом, учитывая, что в правой части соотношения (1.4) стоит модуль, для нахождения расстояния между двумя точками оси нужно из координаты одной из них вычесть координату другой и взять модуль полученной разности.

Пример 1. Даны точки $M_1(3)$, $M_2(-5)$, $M_3(-7)$. Найти величины отрезков $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$, $\overline{M_1M_3}$.

Решение. На основании теоремы 1 имеем

$$M_1M_2 = -5 - 3 = -8, \quad M_2M_3 = -7 - (-5) = -2,$$
$$M_1M_3 = -7 - 3 = -10.$$

Пример 2. Найти расстояние между точками $M_1(3)$ и $M_2(-5)$.

Решение. На основании теоремы 2 имеем

$$d = |-5 - 3| = |-8| = 8.$$

Если на какой-либо оси ввести координатную систему, то можно отметить следующее взаимно обратное соответствие: каждая точка оси имеет одну вполне определенную координату и, наоборот, какое бы ни было действительное число x, на оси найдется одна вполне определенная точка M с данной координатой x.

Ось, на которой введена координатная система, так что ее точки изображают все действительные числа, называется *числовой осью*.

Понятие числовой оси дает возможность формулировать в геометрических терминах арифметические соотношения, что весьма удобно. Таким образом, положение точек на произвольно выбранной прямой можно определять заданием чисел.

Упражнения

1. Определить величину AB и длину $|AB|$ отрезка, заданного точками A и B, удаленными от начала числовой оси вправо соответственно на 3 и 11 единиц.
Отв. $AB = 8$; $|AB| = 8$.

2. Определить величину MN и длину $|MN|$ отрезка, заданного точками M и N, удаленными от начала числовой оси вправо соответственно на 5 и 2 единицы.
Отв. $MN = -3$; $|MN| = 3$.

3. Определить величину CD и длину $|CD|$ отрезка, заданного точками C и D, удаленными от начала числовой оси влево соответственно на 7 и 5 единиц.
Отв. $CD = 2$; $|CD| = 2$.

4. Вычислить координату точки M, если точка N удалена от начала числовой оси вправо на 3 единицы и $MN = 5$ единицам.
Отв. -2.

5. Вычислить координату точки C, если точка D удалена от начала числовой оси влево на 5 единиц и $DC = -3$ единицам.

Отв. -8.

6. Определить отношение $\lambda = \dfrac{MN}{NP}$, в котором точка N делит отрезок MP, если точка M удалена от начала числовой оси вправо на 5 единиц, а точки N и P влево соответственно на 2 и 5 единиц.

Отв. $-10/3$.

§ 2. СИСТЕМА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим способ, который позволяет определять положение точек на плоскости с помощью чисел. Проведем на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые, которые назовем осями координат, задав предварительно положительное направление каждой из них (рис. 1.5). Одна из осей проведена горизонтально (положительное направление на ней выбрано слева направо), а другая ось — вертикально (положительное направление выбрано снизу вверх). Точка пересечения осей координат называется *началом координат* и обозначается буквой O. Горизонтальная ось называется *осью абсцисс* и обозначается буквами Ox. Вертикальная ось называется *осью ординат* и обозначается буквами Oy. Буквы x и y ставятся возле соответствующих осей в положительном направлении от точки O. Таким образом, на чертеже само расположение букв O и x указывает положительное направление оси абсцисс, а расположение букв O и y — положительное направление оси ординат, обозначаемых стрелкой.

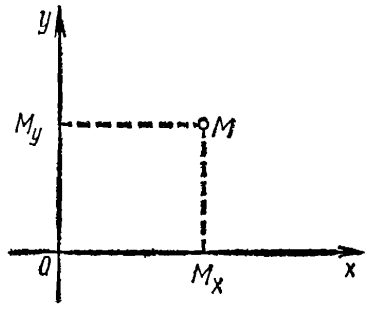

Рис. 1.5

Две взаимно перпендикулярные оси координат с общим началом O (в точке их пересечения) и заданным масштабом измерения длин образуют *систему прямоугольных координат* на плоскости.

Будем считать, что на обеих осях координат выбрана одна и та же единица масштаба, что, вообще говоря, необязательно. Пусть M — произвольная точка плоскости. Спроектируем точку M на координатные оси, т. е. из точки M опустим перпендикуляры на ось абсцисс Ox и ось ординат Oy; основания перпендикуляров обозначим соответственно M_x и M_y (см. рис. 1.5). Пусть x — координата точки M_x на оси абсцисс и y — координата точки M_y на оси ординат: $x = OM_x$, $y = OM_y$. Совокупность чисел x и y вполне определяет положение точки M на плоскости, поэтому они называются *координатами точки* M; при этом x называется *абсциссой* точки M, а y — *ординатой* точки M.

Таким образом, абсцисса точки есть величина отрезка $\overline{OM}_x$, началом которого является начало координат, а концом — основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на ось абсцисс.

Ордината точки есть величина отрезка $\overline{OM_y}$, началом которого является начало координат, а концом — основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на ось ординат.

Оси координат располагаются в следующем порядке: первой считается ось абсцисс, второй — ось ординат. При обозначении координат точки пользуются следующей символикой: координаты точки записывают в круглых скобках рядом с буквой, обозначающей эту точку, ставя, в соответствии с нумерацией осей, на первом месте абсциссу точки, а на втором — ординату. Так, например, $M(x; y)$.

Если рассматривается несколько точек, то их обозначают одной буквой с разными индексами (номерами), например, $M_1, M_2, \ldots, M_n$; аналогично координаты этих точек будут иметь соответствующие индексы (номера), например, $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $\ldots$, $M_n(x_n; y_n)$.

Если задана система прямоугольных координат на плоскости, то можно отметить следующее взаимно обратное соответствие: каждая точка плоскости имеет в этой системе одну вполне определенную пару координат x и y. Обратно, каковы бы ни были два действительных числа x и y, на плоскости всегда найдется одна вполне определенная точка, абсцисса которой в данной системе равна x, а ордината равна y.

На каждой из координатных осей выделим соответствующим образом систему координат, сохранив масштаб и направления осей Ox и Oy, а за начало координат на каждой из осей выберем точку O.

Рассмотрим произвольную точку M и ее проекции M_x и M_y на оси Ox и Oy. Точка M_x имеет на оси Ox координату, равную величине отрезка $\overline{OM_x}$, которая является абсциссой точки M. Точка M_y имеет на оси Oy координату, равную величине отрезка $\overline{OM_y}$, которая является ординатой точки M. Следовательно, абсцисса точки M равна координате точки M_x на оси Ox, а ордината точки M равна координате точки M_y на оси Oy.

Ось Ox разделяет плоскость на две полуплоскости: верхнюю, расположенную в положительном направлении оси Oy, и нижнюю, расположенную в отрицательном направлении оси Oy.

Ось Oy разделяет плоскость на две полуплоскости: правую, расположенную в положительном направлении оси Ox, и левую, расположенную в отрицательном направлении оси Ox.

Пусть M — произвольная точка, расположенная в верхней полуплоскости; тогда отрезок $\overline{OM_y}$ имеет на оси Oy положительное направление и, следовательно, ордината $y = OM_y$ точки M положительна. Если точка M находится в нижней полуплоскости, то отрезок $\overline{OM_y}$ имеет на оси Oy отрицательное направление и, следовательно, ордината $y = OM_y$ точки M отрицательна. Если же точка M лежит на оси Ox, то ее проекция M_y на ось Oy совпадает с точкой O и $y = OM_y$ есть нуль, или величина отрезка OM_y равна нулю.

Таким образом, все точки верхней полуплоскости имеют положительные ординаты ($y > 0$); все точки нижней полуплоскости

имеют отрицательные ординаты ($y < 0$); ординаты точек, лежащих на оси Ox, равны нулю ($y = 0$).

Рассуждая аналогично, можно установить, что все точки правой полуплоскости имеют положительные абсциссы ($x > 0$); все точки левой полуплоскости имеют отрицательные абсциссы ($x < 0$); абсциссы точек, лежащих на оси Oy, равны нулю ($x = 0$). Начало координат O как точка пересечения осей имеет обе координаты, равные нулю: $O(0; 0)$.

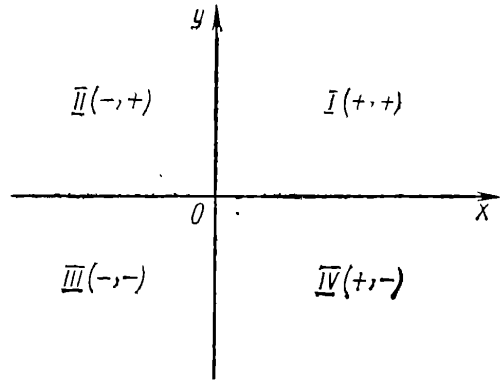

Рис. 1.6

Координатные оси разделяют всю плоскость на четыре части, называемые *четвертями* или *квадрантами*, которые нумеруются по определенному правилу (рис. 1.6).

Первая координатная четверть лежит одновременно в правой и верхней полуплоскостях; вторая — в левой и верхней полуплоскостях; третья — в левой и нижней полуплоскостях; четвертая — в правой и нижней полуплоскостях.

Если точка $M(x; y)$ лежит в I четверти, то $x > 0$; $y > 0$;
если точка $M(x; y)$ лежит во II четверти, то $x < 0$; $y > 0$;
если точка $M(x; y)$ лежит в III четверти, то $x < 0$; $y < 0$;
если точка $M(x; y)$ лежит в IV четверти, то $x > 0$; $y < 0$.

Таким образом, по знакам координат точки можно указать, в какой четверти она расположена.

Пример 1. Построить точку $A(3; -2)$.

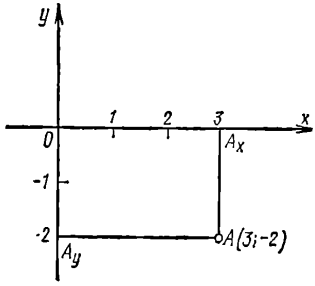

Рис. 1.7

Решение. Абсцисса точки A равна 3, ордината равна —2. Выберем единицу масштаба и возьмем на плоскости прямоугольную систему координат. Отложим на оси Ox вправо от начала координат O отрезок OA_x длиной в 3 единицы масштаба, а по Oy вниз от начала координат — отрезок OA_y длиной в 2 единицы масштаба. Из точки A_x восстановим перпендикуляр к оси Ox, а из точки A_y — перпендикуляр к оси Oy. Пересечение этих перпендикуляров определяет искомую точку A (рис. 1.7).

Пример 2. На плоскости задана точка M (рис. 1.8). Найти ее абсциссу и ординату (положение осей координат и масштаб заданы).

Решение. Опустим из точки M перпендикуляр MM_x на ось Ox и перпендикуляр MM_y на ось Oy. Замеряя отрезки $\overline{OM}_x$ и $\overline{OM}_y$, находим: $OM_x = x = 2{,}8$; $OM_y = y = 4{,}5$. Таким образом, $x = 2{,}8$ единиц масштаба, $y = 4{,}5$ единиц масштаба.

Упражнения

1. Построить точки $M(-5; 1)$, $N(-2; -3)$ и $D\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

2. Найти координаты точек, симметричных относительно оси Ox точкам:
а) $M(-3; -5)$; б) $N(-4; 6)$; в) $P(-1; -1)$.
Отв. а) $(-3; 5)$; б) $(-4; -6)$; в) $(-1; 1)$.

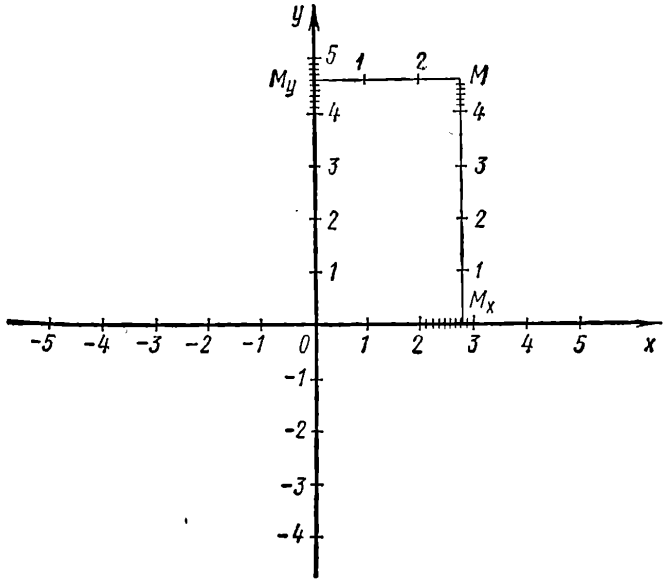

Рис. 1.8

3. Найти координаты точек, симметричных относительно оси Oy точкам:
а) $M(-1; 2)$; б) $N(3; -5)$; в) $P(-2; -2)$.
Отв. а) $(1; 2)$; б) $(-3; -5)$; в) $(2; -2)$.

4. Найти координаты точек, симметричных относительно начала координат точкам:
а) $M(5; -3)$; б) $N(-5; -4)$; в) $P(-2; 1)$.
Отв. а) $(-5; 3)$; б) $(5; 4)$; в) $(2; -1)$.

5. Найти координаты точек, симметричных относительно биссектрисы первого координатного угла точкам:
а) $M(2; 3)$; б) $N(5; -2)$; в) $P(-3; 4)$.
Отв. а) $(3; 2)$; б) $(-2; 5)$; в) $(4; -3)$.

§ 3. ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Для определения положения точки на плоскости иногда удобно пользоваться полярной системой координат.

Полярная система координат определяется заданием некоторой точки O, называемой *полюсом*, исходящего из этой точки луча OA, называемого *полярной осью*, и масштаба для измерения длин. Кроме этого, при задании полярной системы координат должно быть указано положительное направление вращения вокруг точки O. Обычно за положительное направление вращения принимается поворот против часовой стрелки. Пусть заданы полюс O и полярная ось OA (рис. 1.9). Рассмотрим произвольную точку M. Обозначим

через ρ расстояние от точки M до точки O и через θ — угол (в радианах или в градусах), на который нужно повернуть луч OA для совмещения его с лучом OM. Условимся угол θ брать в границах $-\pi < \theta \leqslant \pi$. Это значение угла θ называется *главным*. Тогда очевидно, что каждой точке M плоскости соответствует единственная пара чисел ρ и θ (исключением является полюс, для которого $\rho = 0$, а θ — произвольно). Справедливо и обратное утверждение: каждой паре чисел ρ и θ ($\rho \geqslant 0$, $-\pi < \theta \leqslant \pi$) соответствует единственная точка плоскости.

Число ρ называется *полярным радиусом* и является первой координатой, а число θ называется *полярным углом* и является второй координатой.

Полярный радиус и полярный угол точки называются *полярными координатами*.

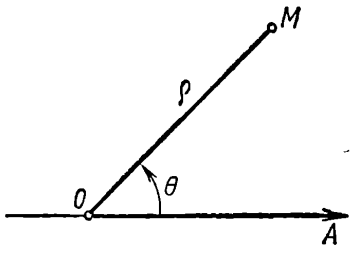

Рис. 1.9

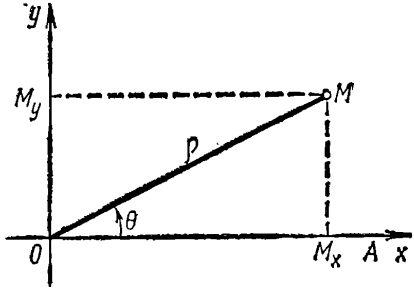

Рис. 1.10

Полярные координаты ρ и θ записываются в скобках после буквы, обозначающей точку: $M(\rho, \theta)$. Часто встречаются задачи, при решении которых необходимо одновременно пользоваться прямоугольной и полярной системами координат. Возникает необходимость установить связь между прямоугольными и полярными координатами одной и той же точки.

Выведем формулы перехода от полярных координат к прямоугольным и обратно. Для простоты рассуждений рассмотрим частный случай, когда полюс полярной системы координат совпадает с началом прямоугольных координат, а полярная ось — с положительной полуосью абсцисс (рис. 1.10).

Пусть M — произвольная точка плоскости. Обозначим через x и y прямоугольные координаты точки M, через ρ и θ — ее полярные координаты. Как известно, $x = OM_x$, $y = OM_y$. С другой стороны, $OM_x = \rho \cos\theta$, $OM_y = \rho \sin\theta$. Поэтому

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta, \\ y &= \rho\sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (1.5)$$

Формулы (1.5) выражают прямоугольные координаты точки M через ее полярные координаты.

Чтобы найти выражение полярных координат через прямоугольные, возведем обе части каждого из равенств (1.5) в квадрат и почленно сложим:

$$x^2+y^2=\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta),\ \text{т. е. } \rho^2=(x^2+y^2),$$

откуда

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{1.6}$$

Из равенств (1.5) имеем

$$\frac{y}{x}=\frac{\rho\sin\theta}{\rho\cos\theta}=\operatorname{tg}\theta,\ \text{т. е. } \operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}. \tag{1.7}$$

По формуле (1.7) находится тангенс полярного угла θ, при этом получаются два значения θ, лежащие в разных четвертях. Так как $y=\rho\sin\theta$, то из двух значений угла θ нужно выбрать то, для которого синус имеет тот же знак, что и y.

Пример 1. Даны прямоугольные координаты точки A: $x=2$, $y=3$. Найти ее полярные координаты.

Решение. По формулам (1.6) и (1.7) находим:

$$\rho=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13};$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{3}{2};\quad \sin\theta=\frac{y}{\rho}=\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Из двух значений $\theta=0{,}98$ и $\theta=0{,}98+\pi=0{,}98+3{,}14=4{,}12$ выбираем $\theta=0{,}98$, так как $\sin\theta$ в данном случае должен иметь положительный знак. Итак, полярные координаты данной точки $\rho=\sqrt{13}$, $\theta=0{,}98$.

В полярной системе координат полярный радиус (ρ) — величина всегда положительная или равная нулю ($\rho\geqslant 0$), так как под ρ понимается расстояние от полюса O до точки M, а расстояние, как и всякая длина, не может быть отрицательным.

Однако, на практике часто пользуются такой системой полярных координат, в которой полярный радиус ρ может принимать и отрицательные значения.

Система полярных координат, в которой полярный радиус ρ может принимать любые значения (положительные, отрицательные и равные нулю), называется *обобщенной системой полярных координат*. Если точка M имеет координаты $+\rho$ и θ: $M(+\rho;\ \theta)$, то она имеет также и координаты $-\rho$ и $\theta+\pi$: $M(-\rho;\ \theta+\pi)$, так как угол $\theta+\pi$ характеризует направление полярного радиуса прямо противоположное тому, которое соответствует углу θ.

Отметим, что какая бы из двух систем полярных координат ни использовалась, всегда паре чисел ρ и θ соответствует на плоскости единственная точка.

Пример 2. Полярные координаты точки A таковы: $\rho=2$, $\theta=\frac{\pi}{4}$. Найти прямоугольные координаты.

Решение. По формулам перехода (1.5) имеем:

$$x = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},\ x = \sqrt{2};$$

$$y = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},\ y = \sqrt{2}.$$

Итак, прямоугольные координаты данной точки: $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$.

Упражнения

1. Найти полярные координаты точки $M(-1; -1)$.

Отв. $M\left(\sqrt{2};\ \frac{5}{4}\pi\right)$; $M\left(-\sqrt{2};\ \frac{\pi}{4}\right)$.

2. Найти полярные координаты точки $N(2, -2)$.

Отв. $N\left(2\sqrt{2};\ \frac{7}{4}\pi\right)$; $N\left(-2\sqrt{2};\ \frac{3}{4}\pi\right)$.

3. Найти прямоугольные координаты точки $A\left(2;\ \frac{3}{2}\pi\right)$.

Отв. $A(0;\ 2)$.

4. В полярной системе координат даны вершины $C\left(3;\ \frac{5}{9}\pi\right)$ и $D\left(5;\ -\frac{11}{14}\pi\right)$ параллелограмма $ABCD$, точка пересечения диагоналей которого совпадает с полюсом. Определить две другие вершины этого параллелограмма.

Отв. $A\left(3;\ -\frac{4}{9}\pi\right)$; $B\left(5;\ \frac{3}{14}\pi\right)$.

5. В полярной системе координат заданы точки $A\left(8;\ -\frac{2}{3}\pi\right)$ и $B\left(6;\ \frac{\pi}{3}\right)$. Вычислить полярные координаты середины отрезка C, соединяющего эти точки.

Отв. $C\left(1;\ -\frac{2}{3}\pi\right)$.

§ 4. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ НА ПЛОСКОСТИ

Пусть в выбранной на плоскости прямоугольной системе координат заданы две точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$*. Выразим расстояние d между этими двумя точками через их координаты.

Теорема 1.3. *Каково бы ни было положение на плоскости точек $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$, расстояние d между ними определяется по формуле*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1.8}$$

Доказательство. Найдем проекции точек M_1 и M_2 на координатные оси (рис. 1.11):

$$OP_1 = x_1,\ OQ_1 = y_1;\ OP_2 = x_2,\ OQ_2 = y_2.$$

Через одну из данных точек, например точку M_1, проведем прямую параллельно оси абсцисс до пересечения в точке N с прямой M_2P_2.

---

* В дальнейшем всегда будем считать, что задана некоторая система координат, и не оговаривать введение координатной системы. Если говорят, что даны какие-то точки, то считается, что известны их координаты.

Так как треугольник M_1NM_2 — прямоугольный, то по теореме Пифагора имеем

$$d^2 = M_1N^2 + M_2N^2.$$

Но

$$M_1N = P_1P_2 = |x_2 - x_1|,$$
$$M_2N = Q_1Q_2 = |y_2 - y_1|.$$

Таким образом,

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2,$$

или

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

откуда

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

что и требовалось доказать.

В формуле (1.8) нужно брать арифметическое значение корня. Таким образом, расстояние между двумя данными точками равно корню квадратному из суммы квадратов разностей одноименных координат этих точек.

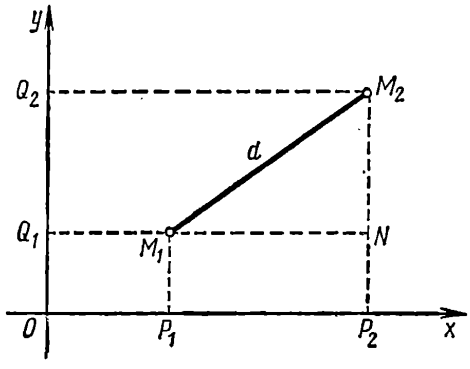

Рис. 1.11

Расстояние точки $M(x; y)$ от начала координат $O(0; 0)$ согласно формуле (1.8) таково:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (1.9)$$

Пример. Найти расстояние между точками $A(4; -5)$ и $B(7; -1)$.

Решение. По формуле (1.8) при $x_1 = 4$; $x_2 = 7$; $y_1 = -5$; $y_2 = -1$ имеем

$$d = \sqrt{(7-4)^2 + [(-1)^2 - (-5)^2]} = 5.$$

Итак, расстояние между точками A и B равно 5 единицам масштаба.

Упражнения

1. Найти расстояние между точками $M(-3; 9)$ и $N(3; 1)$.
Отв. $d = 10$ ед.

2. Найти длину отрезка AB, соединяющего точки $A(-11; 5)$ и $B(1; 0)$.
Отв. $d = 13$ ед.

3. Даны две смежные вершины квадрата $C(3; -7)$ и $D(-1; 4)$. Вычислить площадь квадрата.
Отв. $S = 137$ кв. ед.

4. Даны две противоположные вершины квадрата $M(3; 5)$ и $N(1; -3)$. Вычислить площадь квадрата.
Отв. $S = 34$ кв. ед.

5. Вычислить площадь правильного треугольника, если заданы две его вершины: $B(-3; 2)$ и $D(1; 6)$.

Отв. $S=8\sqrt{3}$ кв. ед.

6. Сторона ромба равна $5\sqrt{10}$, две его противоположные вершины заданы точками $M(4; 9)$ и $N(-2; 1)$. Вычислить площадь ромба.

Отв. $S=150$ кв. ед.

§ 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Предварительно изложим основные элементы теории проекций.

Пусть дан произвольный отрезок $\overline{M_1M_2}$ и некоторая ось u (рис. 1.12). Опустим из точек M_1 и M_2 перпендикуляры на ось u, основания которых обозначим соответственно P_1 и P_2. Началом и концом отрезка $\overline{P_1P_2}$ являются, соответственно, проекция начала и проекция конца отрезка $\overline{M_1M_2}$. Величина отрезка $\overline{P_1P_2}$ оси u называется *проекцией* отрезка $\overline{M_1M_2}$ на ось u. Символически это записывается так: $\text{пр}_u\overline{M_1M_2}=P_1P_2$. Таким образом, проекция отрезка на ось есть число. Это число может быть положительным (рис. 1.12), отрицательным (рис. 1.13, *а*) и равным нулю (рис. 1.13, *б*).

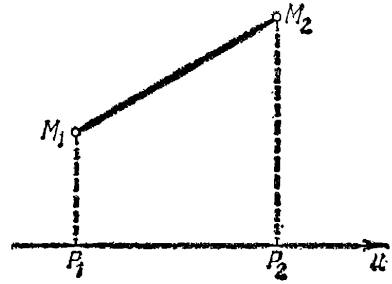

Рис. 1.12

В задачах аналитической геометрии очень часто приходится вычислять проекции отрезка на координатные оси. Условимся обозначать проекцию произвольного отрезка на ось абсцисс большой буквой X, а проекцию на ось ординат — большой буквой Y.

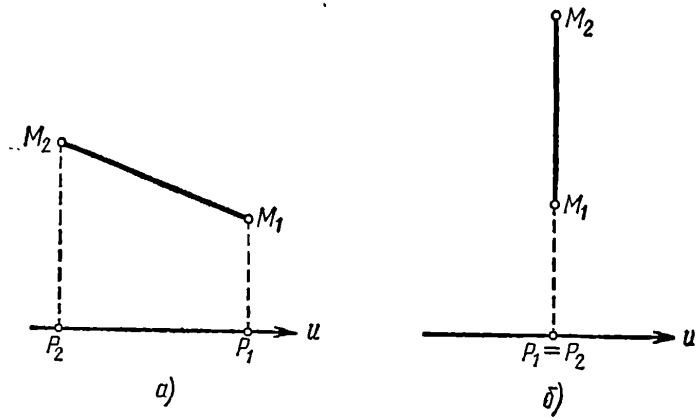

Рис. 1.13

Для вычисления X и Y используется следующая теорема.

Теорема 1.4. *Каково бы ни было расположение точек* $M_1(x_1; y_1)$ *и* $M_2(x_2; y_2)$, *проекции отрезка* $\overline{M_1M_2}$ *на координатные оси определяются по формулам*:

$$X=x_2-x_1,\quad Y=y_2-y_1. \tag{1.10}$$

Доказательство. Опустим из точек M_1 и M_2 перпендикуляры на ось абсцисс и обозначим их основания через P_1 и P_2 (см. рис. 1.11).

В силу теоремы 1.1. имеем $P_1P_2 = x_2 - x_1$. Но $P_1P_2 = X$, следовательно, $X = x_2 - x_1$. Аналогично устанавливается равенство $Y = y_2 - y_1$. Теорема доказана.

Таким образом, *проекция отрезка на координатную ось равна разности координат его конца и начала.*

Если начало отрезка совпадает с началом координат $O(0; 0)$, то формулы (1.10) упрощаются. Так, если в этом случае конец отрезка обозначить буквой M, а ксординаты точки M буквами x и y, то

$$X = x, \quad Y = y, \qquad (1.11)$$

где X и Y — проекции отрезка $\overline{OM}$. Отрезок $\overline{OM}$, идущий от начала координат, называется *радиусом-вектором* точки M.

Таким образом, прямоугольные координаты точки есть проекции ее радиуса-вектора на координатные оси.

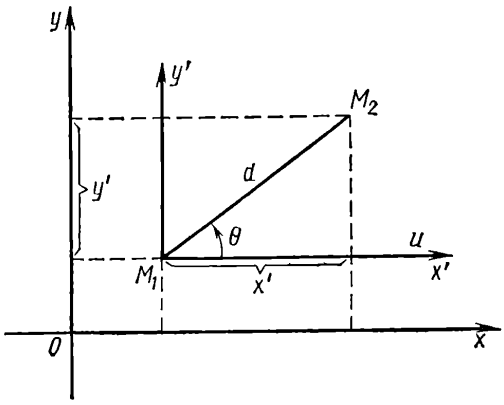

Рис. 1.14

Вернемся к отрезку $\overline{M_1M_2}$. Проведем через точку M_1 луч u параллельно оси Ox в положительном направлении (рис. 1.14). Обозначим через θ угол, на который следует повернуть луч u, чтобы он совпал с отрезком $\overline{M_1M_2}$. Условимся угол θ называть *полярным углом* отрезка $\overline{M_1M_2}$. Очевидно, угол θ есть полярный угол точки M_2 в полярной системе координат, полюсом которой является точка M_1, а полярной осью — луч u. Здесь d является полярным радиусом точки M_2. Примем точку M_1 за начало новой прямоугольной системы координат $x'M_1y'$, оси которой направлены так же, как и оси первоначально заданной прямоугольной системы координат xOy. Очевидно, что проекции отрезка $\overline{M_1M_2}$ на соответствующие оси исходной и новой систем координат одинаковы. Таким образом, числа X и Y являются прямоугольными координатами точки M_2 в новой системе.

На основании формул (1.10) получим

$$X = d\cos\theta, \quad Y = d\sin\theta. \qquad (1.12)$$

Формулы (1.12) выражают проекции произвольного отрезка на координатные оси через его длину и полярный угол. Применяя к этим формулам выводы теоремы 1.4, имеем

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= d\cos\theta, \\ y_2 - y_1 &= d\sin\theta, \end{aligned} \qquad (1.13)$$

или

$$\cos\theta = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \sin\theta = \frac{y_2 - y_1}{d}. \tag{1.14}$$

При решении многих задач удобно пользоваться формулой

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \tag{1.15}$$

которая очевидным образом выводится из формулы (1.14).

Формулы (1.14) и (1.15) дают возможность вычислить полярный угол отрезка через координаты его конца и начала.

Пример. Найти полярный угол отрезка, направленного из точки $A(\sqrt{3};\ 7)$ в точку $B(2\sqrt{3};\ 8)$.

Решение. По формуле (1.10) находим

$$d = \sqrt{(2\sqrt{3} - \sqrt{3})^2 + (8-7)^2} = 2.$$

Применяя формулы (1.14), получим

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, главное значение $\theta = 30°$.

Пусть v — произвольная ось, ψ — угол наклона отрезка $\overline{M_1M_2}$ к этой оси, т. е. угол, на который надо повернуть ось v, чтобы ее направление совпало с направлением отрезка $\overline{M_1M_2}$.

Для вычисления проекции отрезка $\overline{M_1M_2}$ на произвольную ось v служит формула

$$\text{пр}_v \overline{M_1M_2} = d\cos\psi, \tag{1.16}$$

которая не отличается от первой из формул (1.12).

Таким образом, *проекция отрезка на любую ось равна его длине, умноженной на косинус угла наклона к этой оси*. Очевидно, если ψ — острый угол, то $\cos\psi$ и проекция отрезка положительны; если ψ — тупой угол, то $\cos\psi$ и проекция отрезка отрицательны, а если ψ — прямой угол, то проекция равна нулю.

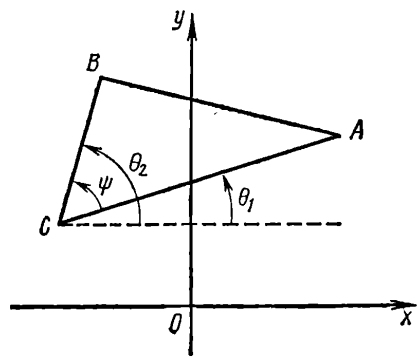

Рис. 1.15

Обратимся к вычислению площади треугольника через координаты его вершин. Пусть даны вершины треугольника $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ и $C(x_3;\ y_3)$ (рис. 1.15). Пусть $CA = d_1$, $CB = d_2$ и ψ — угол между отрезками $\overline{CA}$ и $\overline{CB}$. Как известно из геометрии, площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними, следовательно,

$$S = \left| \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\psi \right|.$$

Пусть θ_1 — полярный угол отрезка $\overline{CA}$, θ_2 — полярный угол отрезка $\overline{CB}$. Так как $\psi = \theta_2 - \theta_1$, то

$$\frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \psi = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin (\theta_2 - \theta_1) =$$

$$= \frac{1}{2} (d_1 \cos \theta_1 \, d_2 \sin \theta_2 - d_2 \cos \theta_2 \, d_1 \sin \theta_1).$$

Используя формулы (1.13), получим:

$$d_1 \cos \theta_1 = x_1 - x_3; \; d_1 \sin \theta_1 = y_1 - y_3;$$
$$d_2 \sin \theta_2 = y_2 - y_3; \; d_2 \cos \theta_2 = x_2 - x_3.$$

Таким образом, выражение для площади треугольника имеет вид

$$S = \frac{1}{2} |(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)|. \qquad (1.17)$$

В частном случае, если вершина C лежит в начале координат (т. е. $x_3 = y_3 = 0$),

$$S = \pm \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1). \qquad (1.18)$$

Если три точки A, B, C лежат на одной прямой, то треугольник ABC вырождается в отрезок и имеет площадь, равную нулю, т. е. $S = 0$. В этом случае имеем

$$0 = \frac{1}{2} [(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)],$$

или

$$(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) = (x_2 - x_3)(y_1 - y_3),$$

откуда

$$\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3} = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3}. \qquad (1.19)$$

Равенство (1.19) связывает координаты трех точек A, B, C тогда и только тогда, когда они лежат на одной прямой. Следовательно, написанная пропорция выражает условие, при котором три точки лежат на одной прямой. Формула (1.19) справедлива при условии, что ни одно из чисел $x_2 - x_3$ и $y_2 - y_3$ не равно нулю. Но так как она очень удобна для запоминания, то условимся ею пользоваться и в случае обращения знаменателей в нуль.

Пример 1. Найти площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $A(2; -3)$, $B(1; 1)$, $C(-6; 5)$.

Решение. В данном случае $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = -6$; $y_1 = -3$; $y_2 = 1$; $y_3 = 5$. Подставляя эти значения в формулу (1.17), получим

$$S = \frac{1}{2} |[2 - (-6)] \cdot (1 - 5) - [1 - (-6)] \cdot (-3 - 5)| =$$

$$= \frac{1}{2} |(2 + 6)(1 - 5) - (1 + 6)(-3 - 5)| = \frac{1}{2} |-32 - (-56)| =$$

$$= \frac{1}{2} |-32 + 56| = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12.$$

Итак, $S = 12$ кв. ед.

Пример 2. Доказать, что три точки $A(1; 8)$, $B(-2; -7)$, $C(-4; -17)$ лежат на одной прямой.

Решение. Для доказательства воспользуемся формулой (1.19), считая $x_1 = 1$; $x_2 = -2$; $x_3 = -4$; $y_1 = 8$; $y_2 = -7$; $y_3 = -17$. Подставляя эти числа в формулу (1.19), получим

$$\frac{1-(-4)}{-2-(-4)} = \frac{8-(-17)}{-7-(-17)}, \quad \frac{1+4}{-2+4} = \frac{8+17}{-7+17}, \quad \text{или} \quad \frac{5}{2} = \frac{5}{2}.$$

Условие (1.10) выполнено и, следовательно, три данные точки лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

Упражнения

1. Вычислить площадь треугольника, если заданы его вершины $M(3; -4)$, $N(-2; 3)$ и $Q(4; 5)$.

Отв. $S = 26$ кв. ед.

2. Вычислить площадь треугольника, вершины которого $C(2; -3)$, $D(3; 2)$ и $E(-2; 5)$.

Отв. $S = 14$ кв. ед.

3. Вычислить площадь параллелограмма, три вершины которого заданы точками $A(-2; 3)$, $B(4; -5)$ и $C(-3; 1)$.

Отв. $S = 20$ кв. ед.

4. Три вершины параллелограмма находятся в точках $M(3; 7)$, $N(2; -3)$ и $P(-1; 4)$. Вычислить длину высоты параллелограмма, опущенной из вершины N на сторону MP.

Отв. 7,4 ед.

5. Площадь треугольника $S = 4$ кв. ед., две вершины находятся в точках $A(2; 1)$ и $B(3; -2)$, а третья вершина C лежит на оси Ox. Определить координаты вершины C.

Отв. $C(5; 0)$ или $C\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$.

6. Площадь треугольника $S = 3$ кв. ед., две вершины находятся в точках $A(3; 1)$ и $B(1; -3)$, а третья вершина C лежит на оси Oy. Определить координаты вершины C.

Отв. $C(0; -8)$ или $C(0; -2)$.

7. Площадь параллелограмма $S = 12$ кв. ед., две вершины находятся в точках $M(-1; 3)$ и $N(-2; 4)$. Найти две другие вершины параллелограмма при условии, что точка пересечения его диагоналей лежит на оси абсцисс.

Отв. $P_1(-7; -3)$, $Q_1(-6; -4)$ или $P_2(17; -3)$, $Q_2(18; -4)$.

§ 6. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ

Задача о делении отрезка в данном отношении относится к числу основных задач аналитической геометрии.

Пусть на плоскости даны две произвольные точки, из которых одна считается первой, а другая — второй. Обозначим их соответственно M_1 и M_2. Проведем через эти точки прямую v и зададим на ней положительное направление.

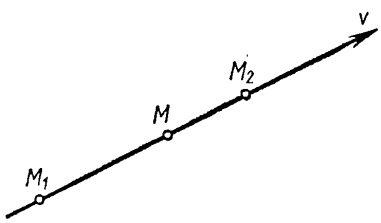

Рис. 1.16

Возьмем третью точку M и расположим ее на оси v произвольным образом с условием, чтобы она не совпадала с точкой M_2 (рис. 1.16).

Число λ, определяемое равенством

$$\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}, \tag{1.20}$$

где M_1M и MM_2 — величины направленных отрезков $\overline{M_1M}$ и $\overline{MM_2}$ оси v, называется *отношением, в котором точка M делит направленный отрезок* $\overline{M_1M_2}$. Число λ не зависит от выбора положительного направления оси v, так как изменение направления оси одновременно изменит знак у числителя и знаменателя дроби в формуле (1.20).

Число λ, являясь величиной относительной, также не зависит от выбора масштаба для измерения длин. Если точка M приближается к точке M_1, то λ приближается к нулю (λ становится равным нулю, когда точка M совпадет с точкой M_1). Если точка M приближается к точке M_2, то λ неограниченно возрастает или стремится к бесконечности.

Если точка M находится на прямой, определяемой числами M_1 и M_2, и между точками M_1 и M_2 (при совпадении положительного направления оси v и отрезка $\overline{M_1M_2}$), то величины M_1M и MM_2 также положительны, следовательно, отношение $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$ есть число положительное.

В случае, если точка M находится на прямой, определяемой точками M_1 и M_2, и вне отрезка $\overline{M_1M_2}$, то одна из величин M_1M и MM_2 положительна, а другая отрицательна. Следовательно, отношение $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$ в этом случае есть число отрицательное.

Задачу о делении отрезка в данном отношении следует понимать так: даны две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ и задано отношение λ, в котором некоторая точка $M(x; y)$ делит направленный отрезок $\overline{M_1M_2}$; требуется найти координаты x, y точки M.

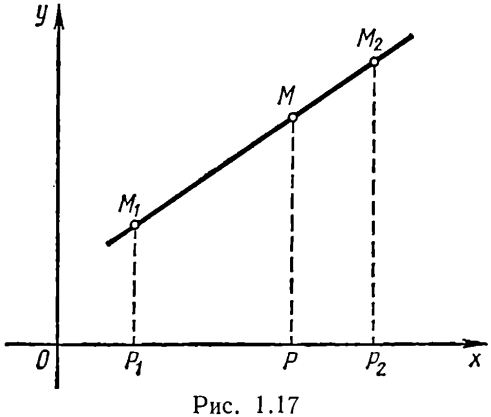

Рис. 1.17

Теорема 1.5. *Если точка $M(x; y)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, то координаты точки определяются по формулам*

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{1.21}$$

Доказательство. Найдем проекции точек M_1, M_2, M на ось Ox и обозначим их соответственно P_1, P_2, P (рис. 1.17).

На основании теоремы о пропорциональности отрезков прямых, заключенных между параллельными прямыми, имеем

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{M_1M}{MM_2} = \lambda. \tag{1.22}$$

Применяя теорему 1.1, имеем

$$P_1P = x - x_1; \quad PP_2 = x_2 - x.$$

Подставляя полученные значения в равенство (1.22), получим

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda.$$

Разрешая последнее равенство относительно неизвестного x, найдем

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Это первая из формул (1.21). Вторую формулу можно получить аналогично, проектируя точки M_1, M_2, M на ось Oy. Если $\lambda = -1$, то формулы (1.21) теряют смысл, так как знаменатели обращаются в нуль.

Необходимо особо отметить частный случай теоремы. Если точка $M(x; y)$ есть середина отрезка $\overline{M_1M_2}$, соединяющего две произвольные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, то координаты точки M определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{1.23}$$

Эти формулы получаются из формул (1.21), если принять $\lambda = 1$. Действительно, так как точка $M(x; y)$ есть середина отрезка $\overline{M_1M_2}$, то $M_1M = MM_2$, и поэтому $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2} = 1$.

Пример 1. Концы отрезка $\overline{AB}$ имеют координаты $A(-4; 8)$, $B(6; -2)$. Найти координаты точек C и D, делящих отрезок $\overline{AB}$ на три равные части (рис. 1.18).

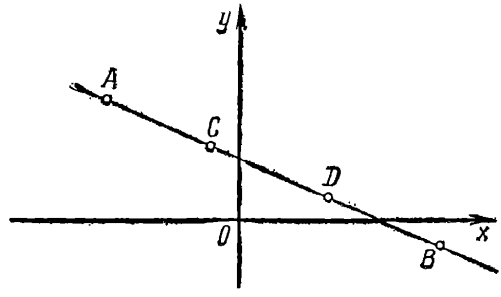

Рис. 1.18

Решение. Отрезок $\overline{AB}$ разделен на три равные части, а точка C делит отрезок $\overline{AB}$ в отношении $\lambda = {}^1/_2$. Так как $AC = {}^1/_2 CB$, то $\lambda = \frac{AC}{CB} = \frac{1}{2}$. В первой из формул (1.21) полагаем $x_1 = -4$; $x_2 = 6$; $\lambda = {}^1/_2$. Пусть x_C — искомая абсцисса точки C. Во второй из формул (1.21) полагаем $y_1 = 8$; $y_2 = -2$; $\lambda = {}^1/_2$. Пусть y_C — искомая ордината точки C. Тогда имеем:

$$x_C = \frac{-4 + \frac{1}{2} \cdot 6}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{-4 + 3}{\frac{3}{2}}, \quad x_C = -\frac{2}{3};$$

$$y_C = \frac{8 + \frac{1}{2}(-2)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{8 - 1}{\frac{3}{2}}, \quad y_C = \frac{14}{3}.$$

Координаты искомой точки найдены: $C\left(-\frac{2}{3}; \frac{14}{3}\right)$.

Координаты точки D можно определить как координаты середины отрезка $\overline{CB}$. Пользуясь формулами (1.23), получаем:

$$x_D = \frac{-\frac{2}{3}+6}{2}, \quad x_D = \frac{8}{3};$$

$$y_D = \frac{\frac{14}{3}-2}{2}, \quad y_D = \frac{4}{3}.$$

Координаты искомой точки найдены: $D\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Пример 2. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, имеющей форму треугольника, если его вершины $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ (толщину пластинки не учитывать).

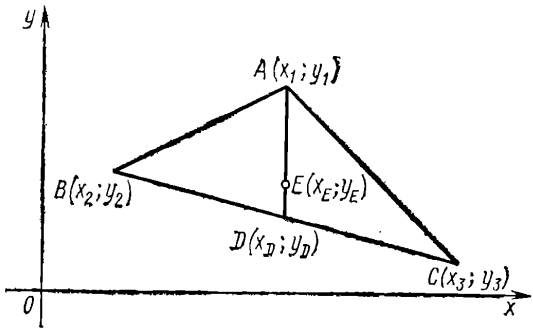

Рис. 1.19

Решение. Центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан. Известно, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке, причем эта точка делит медианы в отношении 2:1, считая от вершины треугольника. Пусть точка деления E имеет координаты x_E и y_E (рис. 1.19).

Рассмотрим медиану, проведенную из вершины A. Один из ее концов имеет координаты $(x_1; y_1)$, а координаты другого ее конца являются координатами середины отрезка $\overline{BC}$, концы которого имеют известные координаты: $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$. Координаты точки D обозначим через x_D и y_D. По формулам (1.23) получим:

$$x_D = \frac{x_2+x_3}{2}, \quad y_D = \frac{y_2+y_3}{2}, \quad D\left(\frac{x_2+x_3}{2}; \frac{y_2+y_3}{2}\right).$$

Зная координаты начала A и конца D отрезка $\overline{AD}$ и учитывая, что точка $E(x_E; y_E)$ делит этот отрезок в отношении $\lambda = 2$, по формулам (1.21) получаем:

$$x_E = \frac{x_1+2\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2} \quad \text{или} \quad x_E = \frac{x_1+x_2+x_3}{3};$$

$$y_E = \frac{y_1+2\frac{y_2+y_3}{2}}{1+2} \quad \text{или} \quad y_E = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

Таким образом, центр тяжести однородной пластинки имеет координаты $E\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$. Итак, координаты центра тяжести однородной треугольной пластинки, если не учитывать ее толщину, равны среднему арифметическому одноименных координат ее вершин.

Упражнения

1. Найти координаты точки E середины отрезка $\overline{MN}$, если концы отрезка $M(-7; 5)$ и $N(11; -9)$.

Отв. $E(2; -2)$.

2. Найти координаты конца N отрезка, если другой его конец находится в точке $M(-5; -7)$, а серединой является точка $E(-9; -12)$.

Отв. $N(-13; -17)$.

3. Даны вершины треугольника $A(-7; 4)$, $B(-5; 2)$ и $C(6; -3)$. Найти координаты середин всех сторон треугольника.

Отв. $(-6; 3)$, $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

4. Концы отрезка $\overline{MN}$ имеют координаты: $M(-4; 8)$ и $N(6; -2)$. Найти координаты точек P и Q, делящих отрезок $\overline{MN}$ на три равные части.

Отв. $P\left(-\frac{2}{3}; \frac{14}{3}\right)$, $Q\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

5. Координаты вершин треугольника $A(1; 4)$, $B(3; -9)$ и $C(-5; 2)$. Определить длину медианы, проведенной из вершины B.

Отв. 13 ед.

6. Даны точки $M(1; -1)$, $N(3; 3)$ и $P(4; 5)$, лежащие на одной прямой. Определить отношение λ, в котором каждая из них делит отрезок, ограниченный двумя другими точками.

Отв. $\lambda_1 = \frac{MN}{NP} = 2$; $\lambda_2 = \frac{MP}{PN} = -3$; $\lambda_3 = \frac{NM}{MP} = -\frac{2}{3}$.

7. Прямая проходит через точки $A(2; -3)$ и $B(-6; 5)$. Найти на прямой точку, ордината которой равна -5.

Отв. $(4; -5)$.

§ 7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ СДВИГЕ ОСЕЙ

Положение точки на плоскости определяется двумя координатами относительно некоторой системы координат. При выборе другой системы координат координаты точки, естественно, меняются. Возникает задача о преобразовании координат: как, зная координаты произвольной точки в одной системе, вычислить координаты этой же точки в другой системе координат?

Выведем формулы преобразования прямоугольных координат при параллельном сдвиге осей, т. е. при таком изменении прямоугольной системы координат, когда направления осей и масштаб остаются неизменными, а переносится лишь начало координат в другую точку плоскости.

Пусть Ox и Oy — исходные, а $O'x'$ и $O'y'$ — новые координатные оси (рис. 1.20). Положение новых осей относительно исходной системы определяется заданием исходных координат нового начала $O'(a, b)$. Число a называется величиной сдвига по направлению оси Ox, а число b — величиной сдвига по направлению оси Oy. Произвольная точка M плоскости имеет относительно исходных осей некоторые координаты $(x; y)$, а относительно новых осей эта же точка имеет другие координаты — $(x'; y')$.

Установим формулы, которые выражают x, y через x', y' (или x', y' через x, y).

Спроектируем точку O' на ось Ox и точку M на оси Ox и $O'x'$. Обозначим проекцию точки O' на ось Ox через $O'x$, а проекции точки M на оси Ox и $O'x'$ через Mx и Mx'. Очевидно, величина отрезка $\overline{O'_xM_x}$ оси Ox равна величине отрезка $\overline{O'M_{x'}}$ оси $O'x'$. Но $O'M_{x'}=x'$, следовательно, $O'_xM_x=x'$. Кроме того, $OO'_x=a$, $OM_x=x$. На основании соотношения (1.1) $OM_x=OO'_x+O'_xM_x$, откуда $x=x'+a$. Аналогично, проектируя на оси Oy и $O'y'$, найдем: $y=y'+b$. Таким образом,

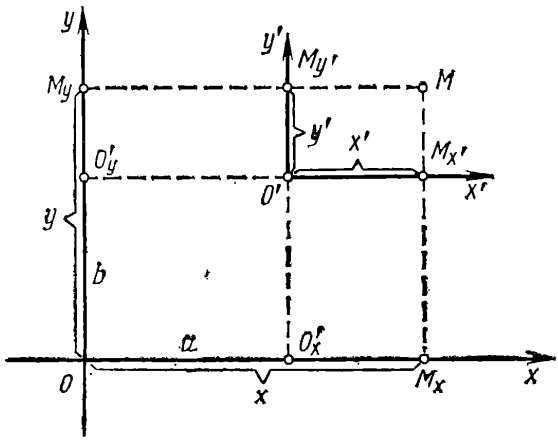

Рис. 1.20

$$x=x'+a,\quad y=y'+b, \tag{1.24}$$

т. е. старая координата равна новой плюс координата нового начала в исходной системе. Эти же формулы можно записать в виде

$$x'=x-a,\quad y'=y-b, \tag{1.25}$$

т. е. новая координата равна исходной минус координата нового начала в исходной системе.

Итак, получены формулы преобразования координат при параллельном сдвиге осей.

Пример. Координаты точки относительно системы координат таковы: $x=2$, $y=-1$. Каковы будут координаты этой точки, если, сохраняя направления осей, перенести начало координат в точку $O'(7;\ -4)$?

Решение. По формуле (1.25) при $a=7$, $b=-4$ имеем $x'=2-7=-5$; $y'=-1-(-4)=3$. Новые координаты точки $x'=-5$, $y'=3$.

§ 8. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕЙ

Выведем формулы преобразования прямоугольных координат при повороте осей, т. е. при таком изменении системы координат, когда обе оси поворачиваются в одну сторону на один и тот же угол, а начало координат и масштаб остаются неизменными.

Пусть Ox и Oy — исходные, а Ox' и Oy' — новые координатные оси (рис. 1.21). Положение двух осей относительно исходной системы определяется заданием угла поворота, на который надо повернуть новые оси до совмещения с исходными. Обозначим этот угол буквой α.

Возьмем на плоскости произвольную точку M, которая относительно исходных осей имеет координаты $(x;\ y)$. По отношению

к новым осям эта точка имеет координаты $(x'; y')$:

$$x = OM_x,\ y = OM_y,\ x' = OM_{x'},\ y = OM_{y'}.$$

Установим формулы, выражающие x', y' через x, y, или x, y через x', y'.

Обозначим полярные координаты точки M через $(\rho; \theta)$, если полярной осью является ось Ox, и через $(\rho; \theta')$, если полярной осью является ось Ox' (в каждом случае $\rho = |OM|$). Очевидно, $\theta = \theta' + \alpha$. По формулам (1.5) имеем $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. Аналогично, $x' = \rho\cos\theta'$, $y = \rho\sin\theta'$. Таким образом,

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta = \rho\cos(\theta' + \alpha) = \rho(\cos\theta'\cos\alpha - \sin\theta'\sin\alpha) = \\ &= \rho\cos\theta'\cos\alpha - \rho\sin\theta'\sin\alpha = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha; \\ y &= \rho\sin\theta = \rho\sin(\theta' + \alpha) = \rho(\cos\theta'\sin\alpha + \sin\theta'\cos\alpha) = \\ &= \rho\cos\theta'\sin\alpha + \rho\sin\theta'\cos\alpha = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Итак, получены формулы, позволяющие при повороте осей на угол α выражать исходные координаты $(x; y)$ произвольной точки M через ее новые координаты $(x'; y')$. Для получения формул, выражающих новые координаты x', y' точки M через исходные ее координаты, нужно в формулах (1.26) поменять местами исходные и новые координаты, заменяя одновременно угол α на угол $-\alpha$. Выполняя эти преобразования, получим

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{aligned} \tag{1.27}$$

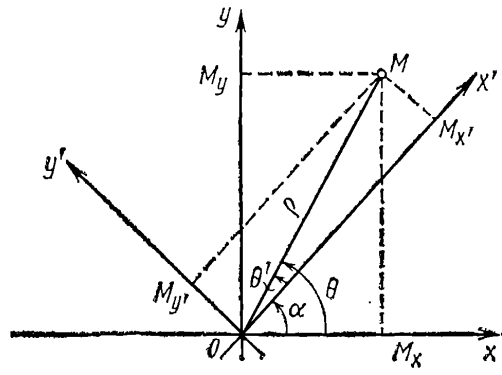

Рис. 1.21

Пример. Найти новые координаты точки $A(\sqrt{3}; 2)$, если координатные оси повернуты на угол 60° против часовой стрелки без изменения положения начала координат.

Решение. Воспользуемся формулами (1.27). Так как $\cos 60° = \frac{1}{2}$, а $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то

$$x' = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{3};$$

$$y' = -\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Новые координаты точки A таковы: $x' = \frac{3}{2}\sqrt{3}$, $y = -\frac{1}{2}$.

§ 9. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ НАЧАЛА КООРДИНАТ И ПОВОРОТЕ ОСЕЙ

Рассмотрим наиболее общее преобразование координат: параллельный сдвиг с последующим поворотом осей. Введем следующие обозначения:

a — величина сдвига системы в направлении оси Ox;

b — величина сдвига системы в направлении оси Oy;

α — угол поворота системы.

Пусть $O'x'$ и $O'y'$ — новые оси. Произвольная точка M плоскости имеет относительно исходных осей некоторые координаты $(x; y)$. Относительно новых осей точка M имеет, вообще говоря, другие координаты $(x'; y')$. Выведем формулы, выражающие новые координаты x', y' через исходные координаты x, y, а также формулы, выражающие координаты x, y через координаты x', y'. С этой целью введем вспомогательную систему координат, у которой направления осей совпадают с направлением осей исходной системы, а начало координат совпадает с началом новой системы (рис. 1.22). Оси вспомогательной системы обозначим через $O'x''$ и $O'y''$, а координаты точки M относительно этих осей через x'', y''. Так как вспомогательная система получается параллельным сдвигом исходной системы на величину a в направлении оси Ox и на величину b — в направлении оси Oy, то по формулам (1.24) имеем

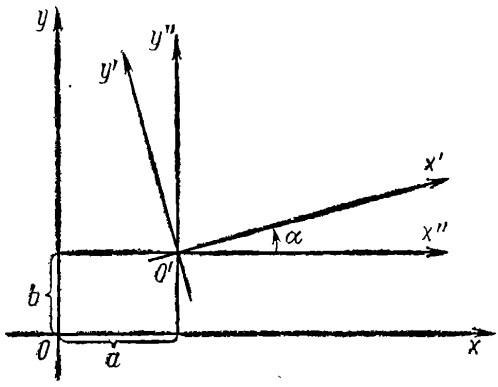

Рис. 1.22

$$\begin{aligned} x &= x'' + a, \\ y &= y'' + b. \end{aligned} \qquad (*)$$

Но далее вспомогательная система поворачивается на угол α, следовательно, согласно формулам (1.26), получим

$$\begin{aligned} x'' &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y'' &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в равенства (*), находим

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + a, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + b. \end{aligned} \qquad (1.28)$$

Разрешим последние два равенства относительно x', y':

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha, \\ y' &= -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (1.29)$$

Упражнения

1. Координаты точки $x=2$, $y=-1$. Найти координаты этой же точки, если, сохраняя направления осей, перенести начало координат в следующие точки:

а) (7; —4); б) (4; —2); в) (2; —1); г) (—1; —4).

Отв. а) (—5; 3); б) (—2; 1); в) (0; 0); г) (3; 3).

2. Даны точки $M(2; 1)$, $N(-1; 3)$ и $P(-2; 5)$. Найти их координаты в новой системе, если начало координат перенесено без изменения направления осей:

а) в точку M; б) в точку N; в) в точку P.

Отв. а) $M(0; 0)$, $N(-3; 2)$, $P(-4; 4)$; б) $M(3; -2)$, $N(0; 0)$; $P(-1; 2)$; в) $M(4; -4)$, $N(1; -2)$, $P(0; 0)$.

3. Даны точки $A(3; 1)$, $B(-1; 5)$ и $C(-3; -1)$. Найти их координаты в новой системе, если оси координат повернуты на угол:

а) —45°; б) 90°; в) —90°; г) 180°.

Отв. а) $A(\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$, $B(-3\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$, $C(-\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$; б) $A(1; -3)$, $B(5; 1)$, $C(-1; 3)$; в) $A(-1; 3)$; $B(-5; -1)$, $C(1; -3)$; г) $A(-3; -1)$, $B(1; -5)$, $C(3; 1)$.

4. Начало координат перенесено в точку $A(-1; 2)$, оси координат повернуты на угол $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{5}{12}$. Координаты точек в новой системе $M(3; 2)$, $N(2; -3)$ и $P(13; -13)$. Найти координаты этих точек в исходной системе координат.

Отв. $M(1; 5)$, $N(2; 0)$, $P(16; -5)$.

5. Даны точки $M(5; 5)$, $N(2; -1)$ и $P(12; -6)$. Найти координаты точек в новой системе, если начало координат перенесено в точку N, а оси координат повернуты на угол $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

Отв. $M(6; 3)$, $N(0; 0)$, $P(5; -10)$.

Глава II

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

§ 1. ПОНЯТИЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ

В прямоугольной системе координат каждой точке плоскости соответствует пара действительных чисел и, наоборот, каждой паре чисел соответствует определенная точка плоскости. Покажем, что линиям на плоскости соответствуют уравнения с двумя неизвестными. Такое соответствие позволяет свести изучение геометрических свойств линий к исследованию аналитических свойств соответствующих им уравнений. Таким образом, если известно уравнение линии, то относительно каждой точки плоскости возможно решить вопрос о том, лежит она на этой линии или нет. Для этого достаточно координаты исследуемой точки подставить в уравнение вместо неизвестных переменных; если эти координаты удовлетворяют уравнению, то точка лежит на линии, в противном случае — нет.

Уравнением данной линии называется такое уравнение, связывающее переменные x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на линии, и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на ней.

Входящие в уравнение координаты x и y произвольной точки линии называются *текущими координатами*.

Линия, определяемая уравнением вида $y=f(x)$, называется *графиком функции* $f(x)$ или, иначе, линия, определяемая произвольным уравнением $F(x, y)=0$, есть график той функциональной зависимости между x, y, которая устанавливается этим уравнением. Итак, уравнение между координатами x, y определяет линию как геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют данному уравнению.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Построить линию, определяемую уравнением $x-y=0$.

Решение. Перепишем уравнение так: $y=x$. Очевидно, геометрическим местом точек, для которых абсцисса равна ординате, является биссектриса AB первого и третьего координатных углов (рис. 2.1). Следовательно, уравнение $x-y=0$ определяет биссектрису AB.

Пример 2. Построить линию, определяемую уравнением $x+y=0$.

Решение. Представим это уравнение в виде $y=-x$. Очевидно, геометрическим местом точек, для которых ордината равна абсциссе, взятой с противоположным знаком, является биссектриса CD второго и четвертого координатных углов (рис. 2.1). Следовательно, уравнение $x+y=0$ определяет биссектрису CD.

Пример 3. Построить линию, определяемую уравнением $x^2 - y^2 = 0$.

Решение. Запишем уравнение в виде $(x+y)(x-y)=0$. Очевидно, что точки, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, суть только те, которые удовлетворяют либо уравнению $x+y=0$, либо уравнению $x-y=0$. Таким образом, линия, определяемая уравнением $x^2-y^2=0$, состоит из точек двух биссектрис AB и CD координатных углов (рис. 2.1).

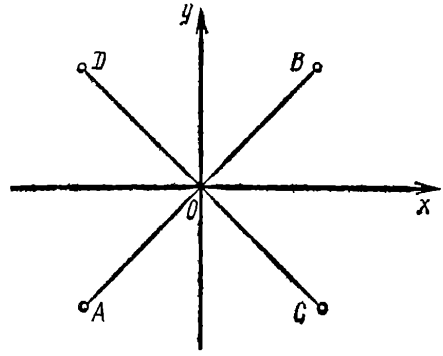

Рис. 2.1

Пример 4. Построить линию, определяемую уравнением $x^2+y^2=0$.

Решение. Представим уравнение в виде $y^2=-x^2$. Очевидно, что при действительных значениях x и y числа x^2 и y^2 не могут иметь разные знаки (исключая случай $x=0$, $y=0$). Следовательно, данному уравнению удовлетворяют только координаты точки $O(0;\ 0)$.

Часто приходится находить точки пересечения двух линий.

Пусть эти линии определяются уравнениями $F(x,\ y)=0$, $\Phi(x,\ y)=0$. Требуется найти точки их пересечения. Каждая точка пересечения данных линий есть их общая точка, т. е. координаты такой точки должны удовлетворять как уравнению $F(x,\ y)=0$, так и уравнению $\Phi(x,\ y)=0$. Следовательно, чтобы найти точки пересечения двух данных линий, нужно совместно решить определяющие их уравнения. Каждое действительное решение системы

$$\left.\begin{aligned} F(x,\ y)&=0,\\ \Phi(x,\ y)&=0 \end{aligned}\right\}$$

дает точку пересечения, т. е. одну из искомых точек. Если окажется, что эта система несовместна или во всех ее решениях хотя бы одно из чисел x или y имеет мнимое значение, то это означает, что данные линии не пересекаются.

Пример 5. Найти точку пересечения двух линий, уравнения которых $5x-y-7=0$ и $3x+2y-12=0$.

Решение. Умножая первое из уравнений на 2 и складывая полученный результат почленно со вторым из уравнений, получаем $13x-26=0$, откуда $x=2$. Подставим найденное значение x в первое из уравнений:

$$5\cdot 2-y-7=0;\ y=10-7=3;\ y=3.$$

Итак, искомая точка имеет координаты (2; 3).

В некоторых случаях при составлении уравнений линий текущие координаты не связываются одним уравнением, а каждая координата в отдельности выражается в виде функции нового пере-

менного (параметра), например t. Тогда уравнение линии имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t). \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

Величины x и y при каждом значении t рассматриваются как координаты некоторой точки M, лежащей на данной линии. Равенства (2.1) называются *параметрическими уравнениями линии*. Если из уравнений (2.1) исключить параметр t, то получим опять уравнение вида $F(x, y) = 0$.

Пример 7. Даны параметрические уравнения линии

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= a\sin t. \end{aligned}\right\}$$

Исключив параметр t, найти уравнение линии в виде $F(x, y) = 0$.

Решение. Возведем обе части каждого из уравнений в квадрат и выполним сложение:

$$x^2 + y^2 = a^2;\ x^2 + y^2 - a^2 = 0.$$

Это и есть искомое уравнение линии.

При исследовании формы линии по ее уравнению приходится пользоваться полярными координатами. *Уравнением линии в полярной системе координат* называется такое уравнение между переменными ρ и φ, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на линии

$$\rho = f(\varphi). \qquad (2.2)$$

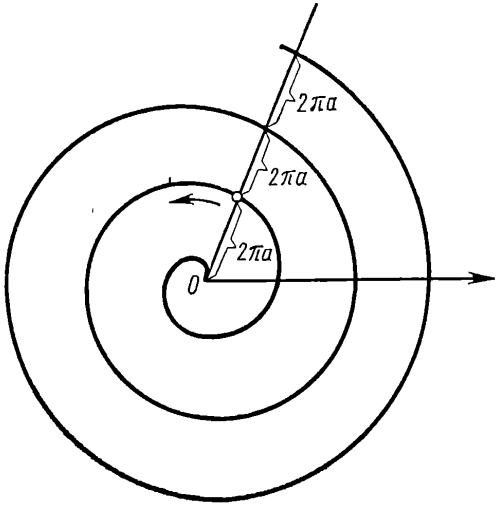

Рис. 2.2

Придавая φ числовые значения и находя соответствующие значения ρ, получим точки, которые образуют линию на плоскости — график функции (2.2) в полярных координатах. График уравнения линии в полярных координатах $\rho = a\varphi + b$, называемой *спиралью Архимеда*, изображен на рис. 2.2. Кривая получается при наложении равномерного вращения точки и равномерного движения ее вдоль по радиусу, так как если $\rho = vt + b$, $\varphi = \omega t$, то $\rho = \frac{v}{\omega}\varphi + b$. Таким образом, график одной и той же функции (в данном случае линейной) в полярных и прямоугольных координатах имеет совершенно различный вид.

Иногда необходимо перейти от уравнения линии в прямоугольных координатах к уравнению той же линии в полярных коорди-

натах или наоборот. В этом случае следует применять формулы, связывающие полярные и прямоугольные координаты.

Пример 8. Уравнение окружности в полярных координатах $\rho = 2a\cos\varphi$ записать в прямоугольных координатах.

Решение. Выразим ρ и $\cos\varphi$ через x, y:

$$\rho = \pm\sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Подставляя эти выражения в данное уравнение, после упрощений получим

$$x^2+y^2-2ax=0,$$

или

$$x^2-2ax+a^2-a^2+y^2=0,$$

откуда

$$(x-a)^2+y^2=a^2.$$

Упражнения

1. Найти уравнения сторон треугольника, вершины которого $A(1; -1)$, $B(3; 5)$, $C(-7; 11)$.

Отв. $3x-y-4=0$; $3x+5y-34=0$; $3x+2y-1=0$.

2. Найти координаты вершин треугольника, стороны AB, BC и AC которого заданы следующими уравнениями: $x+y-5=0$, $2x-y+4=0$ и $5x-3y+14=0$.

Отв. $A\left(\frac{1}{8}; \frac{39}{8}\right)$, $B\left(\frac{1}{3}; \frac{14}{3}\right)$, $C(2; 8)$.

3. Площадь треугольника $S=8$ кв. ед., две вершины имеют координаты $A(1; -2)$ и $B(2; 3)$, а третья вершина C лежит на прямой $2x+y-2=0$. Найти координаты вершины C.

Отв. $C(-1; 4)$ или $C\left(\frac{25}{7}; -\frac{36}{7}\right)$.

4. Площадь треугольника $S=1{,}5$ кв. ед., две вершины находятся в точках $A(2; -3)$ и $B(3; -2)$. Центр тяжести треугольника лежит на прямой $3x-y-8=0$. Найти координаты вершины C.

Отв. $C(1; -1)$ или $C(-2; -10)$.

§ 2. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ С УГЛОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Чтобы составить уравнение прямой, нужно определить ее положение относительно координатных осей.

Одной из величин, характеризующих положение прямой на плоскости, является угловой коэффициент прямой.

Углом наклона прямой к оси Ox называется угол, на который надо повернуть ось Ox, чтобы она совпала с данной прямой (или оказалась параллельной ей). Знак угла определяется направлением поворота: «плюс» при повороте против часовой стрелки и «минус» — по часовой стрелке. Если после некоторого поворота оси Ox придать ей одно из направлений данной прямой, то, совершая дополнительный поворот на угол $\pm\pi$ или $\pm 2\pi$ и т. д., каждый раз будем получать одно из направлений данной прямой. Таким образом, угол наклона прямой к оси Ox может иметь множество раз-

личных значений, которые отличаются друг от друга на величину $\pm n\pi$, где n — натуральное число. Тангенс этого угла определяется однозначно, так как $\operatorname{tg}(\alpha \pm n\pi) = \operatorname{tg}\alpha$.

Тангенс угла наклона прямой к оси Ox называется *угловым коэффициентом* этой прямой.

Если угол наклона прямой к оси Ox обозначить через α, а угловой коэффициент прямой через k, то

$$k = \operatorname{tg}\alpha. \tag{2.3}$$

Угловой коэффициент характеризует направление прямой. Если $k = 0$, то и $\alpha = 0$, т. е. прямая параллельна оси абсцисс. При положительном угловом коэффициенте угол наклона прямой к оси

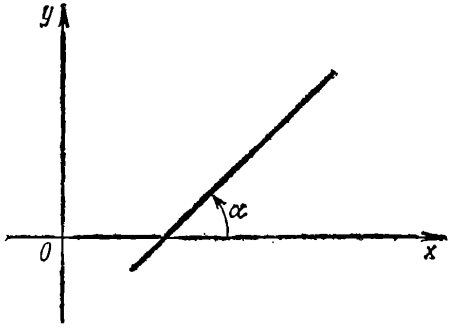

Рис. 2.3

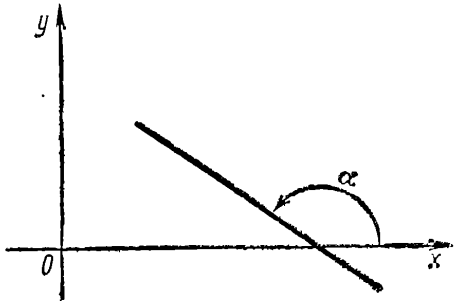

Рис. 2.4

Ox является острым (рис. 2.3). При этом чем больше угловой коэффициент, тем больше угол наклона прямой к оси Ox. Если угловой коэффициент отрицателен, то угол наклона прямой к оси Ox тупой (рис. 2.4). Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то $k = \operatorname{tg}\alpha$ теряет арифметический смысл, т. е. прямая перпендикулярна к оси Ox и не имеет углового коэффициента. Выразим угловой коэффициент прямой через коэффициенты двух любых точек, лежащих на этой прямой.

Рассмотрим произвольную прямую, не перпендикулярную к оси Ox. Возьмем на ней две произвольные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Угол наклона этой прямой к оси Ox равен α, следовательно, $\operatorname{tg}\alpha$ равен угловому коэффициенту прямой (рис. 2.5). Очевидно, что $\angle M_2M_1T = \alpha$; $M_1T = N_1N_2 = x_2 - x_1$; $M_2T = y_2 - y_1$. Тогда

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{M_2T}{M_1T} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Таким образом,

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.4}$$

Выведем уравнение прямой, не параллельной оси ординат, полагая известными ее угловой коэффициент k и величину b направленного отрезка $\overline{OB}$, отсекаемого ею на оси Oy (рис. 2.6). Обозначим через M произвольную точку прямой, через x, y — ее текущие коорди-

наты. Рассмотрим, кроме того, точку $B(0; b)$, в которой прямая пересекает ось Oy.

Воспользуемся соотношением (2.4), заменив точку M_1 точкой B, а точку M_2—точкой M.

Тогда

$$k=\frac{y-b}{x}.$$

Освобождаясь от знаменателя, получим уравнение искомой прямой

$$y=kx+b. \qquad (2.5)$$

Таким образом, каждая прямая, не перпендикулярная к оси Ox, может быть определена уравнением вида (2.5). Верно и обратное, каждое уравнение вида (2.5) определяет прямую, которая имеет угловой коэффициент k и отсекает на оси Oy отрезок величиной b.

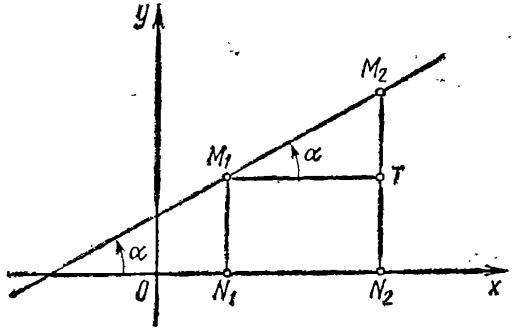

Рис. 2.5

Уравнение вида (2.5) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Пример 1. Составить уравнение прямой линии, отсекающей на оси ординат отрезок, величина которого равна 3 единицам длины; угол наклона прямой к оси абсцисс равен 45°.

Решение. В данном случае $b=3$, а $k=\operatorname{tg}45°=1$. Следовательно, искомое уравнение имеет вид

$$y=x+3.$$

Функция $y=kx+b$ называется *линейной*. На основании изложенного можно утверждать, что графиком линейной функции в прямоугольных координатах (в отличие от полярных координат) является прямая линия.

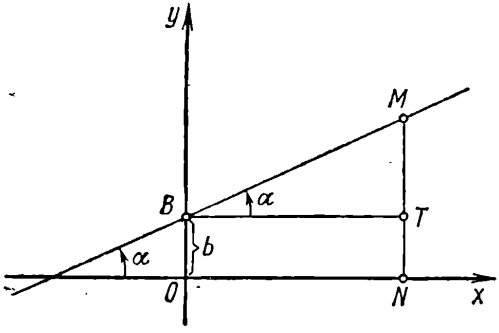

Рис. 2.6

Если $b=0$, то

$$y=kx. \qquad (2.6)$$

В этом случае переменные x и y называют *прямо пропорциональными*, а число k—коэффициентом пропорциональности, т. е. уравнение $y=kx$ выражает прямую пропорциональную зависимость между величинами x и y.

Графиком функции $y=kx$ является прямая линия, которая проходит через начало координат и имеет угловой коэффициент, равный k.

Составим уравнение прямой, зная одну ее точку $M_1(x_1; y_1)$ и угловой коэффициент k.

Пусть M — переменная точка с текущими координатами x, y. Если точка M лежит на прямой, которая проходит через точку и имеет данный угловой коэффициент k, то, в силу соотношения (2.4),

$$k = \frac{y - y_1}{x - x_1}. \tag{2.7}$$

Искомое уравнение прямой имеет вид

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{2.8}$$

Совокупность всех прямых, проходящих через некоторую точку плоскости, называется *пучком прямых*, а общая их точка — *центром пучка*. Таким образом, уравнение (2.8) определяет совокупность прямых, проходящих через точку $M_1(x_1; y_1)$, т. е. пучок прямых с центром в этой точке. Пользуясь соотношением (2.8), можно составить уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. С помощью соотношения (2.4) находим угловой коэффициент искомой прямой

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Затем, на основании зависимости (2.8), получаем искомое уравнение

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

или

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{2.9}$$

Равенство (2.9) называют *уравнением прямой, проходящей через две данные точки.*

Пример 2. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $(-1; 2)$ и $(2; 1)$.

Решение. По уравнению (2.9), полагая в $x_1 = -1$, $y_1 = 2$, $x_2 = 2$, $y_2 = 1$, имеем $\frac{y-2}{1-2} = \frac{x+1}{2+1}$ или $\frac{y-2}{-1} = \frac{x+1}{3}$. После упрощений получаем искомое уравнение

$$x + 3y - 5 = 0.$$

§ 3. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Рассмотрим уравнение прямой, параллельной оси Oy. Пусть a — абсцисса точки пересечения прямой с осью Ox (рис. 2.7). Очевидно, любая точка прямой имеет абсциссу, равную a. Следовательно, уравнение этой прямой

$$x = a. \tag{2.10}$$

Итак, если прямая не параллельна оси Oy, то ее уравнение может быть записано в виде (2.5) или в виде (2.6), если же прямая па-

раллельна оси Oy, то ее уравнение записывается в виде (2.10). Так как уравнения (2.5), (2.6), (2.10) являются уравнениями первой степени относительно переменных x и y, то в прямоугольной системе координат всякая прямая может быть представлена уравнением первой степени. Верно ли обратное: всякое ли уравнение первой степени относительно переменных x, y определяет прямую линию?

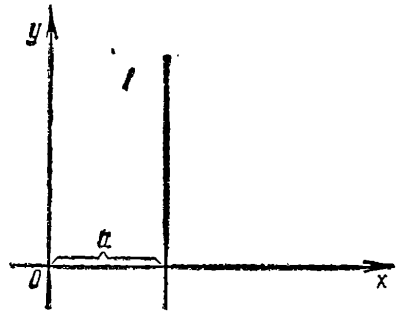

Рис. 2.7

Рассмотрим уравнение первой степени относительно x, y в общем виде

$$Ax+By+C=0. \qquad (2.11)$$

Здесь A, B, C — произвольные числа. При этом коэффициенты A и B не могут быть одновременно равны нулю (в противном случае уравнение (2.11) не содержит переменные x, y и перестает быть уравнением). При $B\neq 0$ уравнение (2.11) можно записать так:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

или, если обозначить $-\frac{A}{B}=k$ и $-\frac{C}{B}=b$, в виде

$$y=kx+b.$$

Уравнение (2.5), как очевидно, является уравнением прямой линии, имеющей угловой коэффициент k и отсекающей на оси ординат отрезок величиной b.

Если $B=0$, то уравнение (2.11) имеет вид $Ax+C=0$. Решая это уравнение относительно x, получим $x=-\frac{C}{A}$ или, если считать $-\frac{C}{A}=a$, $x=a$. Но последнее является уравнением прямой линии, параллельной оси Oy.

Таким образом, всякое уравнение первой степени относительно текущих координат определяет прямую линию. В соответствии с этим уравнение (2.11) называется *общим уравнением прямой линии*. Резюмируя, можно сказать, что прямая линия представляется в прямоугольной системе координат уравнением первой степени относительно текущих координат x и y.

Пример 1. Уравнение $3x+2y-1=0$ записать в виде уравнения с угловым коэффициентом.

Решение. Разрешим данное уравнение относительно y:

$$y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2},$$

тогда угловой коэффициент прямой $k=-\frac{3}{2}$, а величина отрезка, отсекаемого ею на оси ординат, $b=\frac{1}{2}$.

Рассмотрим частные случаи, когда уравнение первой степени (2.11) является неполным.

Случай 1. Пусть $C=0$. Тогда уравнение (2.11) принимает вид $Ax+By=0$ и определяет прямую, проходящую через начало координат. Действительно, координаты точки O (0; 0) удовлетворяют уравнению $Ax+By=0$, следовательно, начало координат принадлежит прямой.

Случай 2. Пусть $B=0\,(A\neq 0)$. Уравнение (2.11) принимает вид $Ax+C=0$ и определяет прямую, параллельную оси Oy. Как было показано, в этом случае уравнение (2.11) приводится к виду

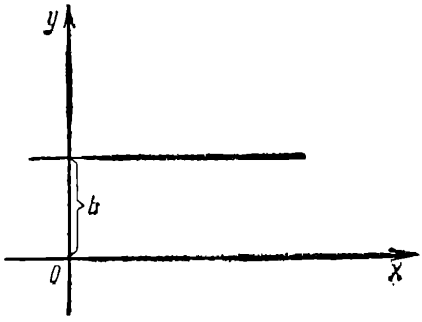

Рис. 2.8

$$x=a, \quad \text{где} \quad a=-\frac{C}{A}.$$

Здесь a — величина отрезка, который прямая отсекает от оси Ox (рис. 2.7). Если $a=0$, то прямая совпадает с осью Oy. Следовательно, уравнение $x=0$ есть уравнение оси ординат.

Случай 3. Пусть $A=0$ $(B\neq 0)$. Уравнение (2.11) принимает вид $By+C=0$ и определяет прямую, параллельную оси Ox.

Если положить $-\frac{C}{B}=b$, то уравнение $By+C=0$ примет вид $y=b$. Здесь b — величина отрезка, который отсекает прямая от оси Oy (рис. 2.8). Если $b=0$, то прямая совпадает с осью Ox. Следовательно, уравнение $y=0$ есть уравнение оси абсцисс.

§ 4. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В ОТРЕЗКАХ

Рассмотрим прямую линию, пересекающую обе координатные оси и не проходящую через начало координат. Положение прямой можно определить, задав величины a и b отрезков, отсекаемых прямой соответственно на осях Ox и Oy (рис. 2.9).

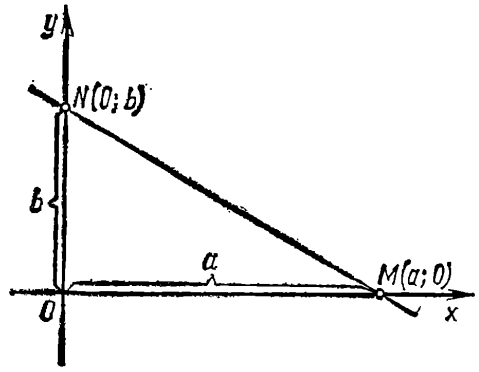

Рис. 2.9

Рассмотрим уравнение $Ax+By+C=0$, считая, что $A\neq B\neq C\neq 0$. Перенося свободный член C в правую часть уравнения, получим

$$Ax+By=-C.$$

Разделив обе части уравнения на $-C$, имеем

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1,$$

или

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1.$$

Пусть $a=-\frac{C}{A}$ и $b=-\frac{C}{B}$, тогда

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (2.12)$$

Действительно, a и b являются отрезками, которые прямая отсекает на координатных осях (считая от начала координат). В этом легко убедиться следующим образом. Для определения точки пересечения прямой с осью Ox необходимо совместно решить систему

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\\&y=0.\end{aligned}\right\}$$

Отсюда $x=a$, $y=0$. Таким образом, величина отрезка, отсекаемого прямой от оси Ox, действительно равна a. Аналогично устанавливается, что величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy, равна b.

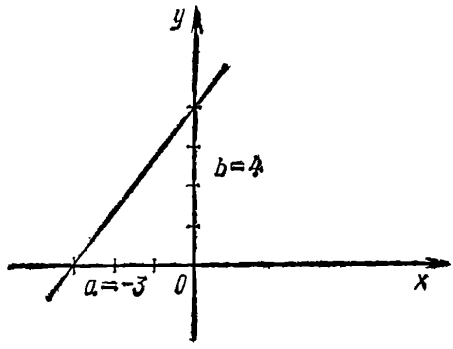

Рис. 2.10

Уравнение (2.12) называется *уравнением прямой в отрезках*.

Пример 1. Прямая задана уравнением $4x-3y+12=0$. Составить уравнение этой прямой в отрезках и построить ее график.

Решение. Так как точка $(a;\ 0)$ лежит на данной прямой, то ее координаты удовлетворяют уравнению прямой. Следовательно, $4a+12=0$, откуда $a=-3$. Аналогично, подставляя координаты точки $(0;\ b)$ в уравнение прямой, найдем: $-3b+12=0$, откуда $b=4$. Тогда уравнение прямой в отрезках имеет вид

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}=1.$$

Отложим на координатных осях Ox и Oy отрезки, величины которых соответственно равны $a=-3$, $b=4$, и соединим их концы (рис. 2.10). Прямая построена.

Упражнения

1. Определить, при каком значении a прямая $(a+2)x+(a^2-9)y+3a^2-8a+5=0$:

а) параллельна оси абсцисс;

б) параллельна оси ординат;

в) проходит через начало координат;

Найти уравнение прямой в каждом из рассматриваемых случаев.

Отв. а) $a=-2$, $5y-33=0$; б) $a=-3$, $x-56=0$; $a=3$, $5x+8=0$; в) $a=1$, $3x-8y=0$; $a=\frac{5}{3}$, $33x-56y=0$.

2. Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой $3x-4y-12=0$ от координатного угла.

Отв. $S=6$ кв. ед.

3. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку A (2; 3) и отсекает на координатных осях отрезки равной длины, считая от начала координат.

Отв. $x+y-5=0$; $x-y+1=0$; $3x-2y=0$.

§ 5. УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ

Рассмотрим две прямые: прямую I и прямую II (рис. 2.11). Угловые коэффициенты обозначим соответственно через k_1 и k_2. Угол между этими прямыми обозначим через φ. *Углом* φ *между двумя прямыми* I и II называется наименьший угол, на который нужно повернуть прямую I, чтобы она совпала с положительным направлением прямой II (или стала ей параллельна). Угол φ имеет знак минус или плюс в зависимости от того, будет ли поворот осуществляться по часовой стрелке или против часовой стрелки.

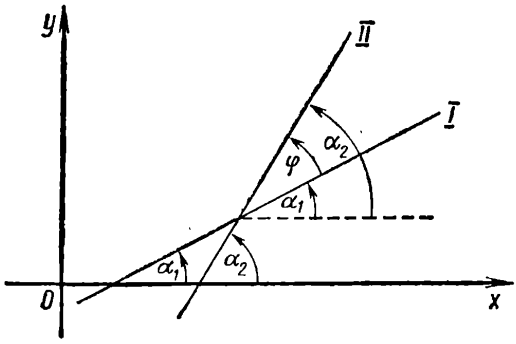

Рис. 2.11

Пусть прямые I и II заданы уравнениями $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$. Пусть α_1 — угол наклона прямой I к оси Ox; α_2 — угол наклона прямой II к оси Ox. Очевидно, соотношение $\alpha_1+\varphi=\alpha_2$, откуда $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$. Если прямые I и II не являются перпендикулярными, то

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}. \qquad (*)$$

С другой стороны, $\operatorname{tg}\alpha_1=k_1$; $\operatorname{tg}\alpha_2=k_2$. Подставляя эти значения в выражение (*), получим формулу для вычисления угла между двумя прямыми:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}. \qquad (2.13)$$

Если одна из прямых параллельна оси Oy, то формула не имеет смысла. В этом случае угол между двумя прямыми вычисляется по формуле $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$.

Если рассматривается угол между двумя прямыми и не указан порядок, в котором они расположены, то этот порядок устанавливается произвольно. Очевидно, что изменение порядка влечет за собой изменение знака для тангенса угла.

Так как при добавочном повороте на угол π прямая снова займет начальное положение, то ясно, что угол между прямыми определяется неоднозначно (с точностью до слагаемого, кратного π).

Пример 1. Найти угол, образуемый прямыми

$$y = 2x + 4, \qquad (I)$$

$$y = 3x - 1. \qquad (II)$$

Решение. Если перенумеровать прямые в заданном порядке, то угловой коэффициент прямой (I) $k_1 = 2$, а прямой (II) $k_2 = 3$. По формуле (2.13) получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3-2}{1+3\cdot 2} = \frac{1}{7} \quad \text{и} \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{7} = 8°8'.$$

Итак, один из углов между данными прямыми равен $8°8'$.

Упражнения

1. Найти угол φ, образованный прямыми $3x - y + 5 = 0$ и $2x + y - 7 = 0$. Решить задачу, не вычисляя угловых коэффициентов данных прямых.
Отв. $\varphi = 45°$.

2. Найти угол φ, образованный прямыми $x\sqrt{3} + y\sqrt{2} - 2 = 0$ и $x\sqrt{6} - 3y + 3 = 0$. Решить задачу, не вычисляя угловых коэффициентов данных прямых.
Отв. $\varphi = 90°$.

3. Даны вершины треугольника $M(-10; 2)$ и $N(6; 4)$. Высоты треугольника пересекаются в точке $P(5; 2)$. Найти координаты третьей вершины Q.
Отв. $Q(6; -6)$.

4. Даны вершины треугольника $A(3; -1)$, $B(5; 7)$ и точка пересечения высот $O(4; -1)$. Найти уравнения сторон треугольника.
Отв. $4x - y - 13 = 0$; $x - 5 = 0$; $x + 8y + 5 = 0$.

5. Найти уравнение сторон треугольника MNQ, если известны одна из вершин $M(1; 3)$ и уравнения двух медиан $x - 2y + 1 = 0$ и $y - 1 = 0$.
Отв. $x + 2y - 7 = 0$; $x - 4y - 1 = 0$; $x - y + 2 = 0$.

§ 6. УСЛОВИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ДВУХ ПРЯМЫХ

Пусть даны две прямые линии и их угловые коэффициенты k_1 и k_2. Обозначим через α_1 и α_2 углы наклона прямых к оси Ox. Очевидно, что данные прямые параллельны тогда и только тогда, когда углы наклона их к оси Ox имеют одинаковые значения, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2$$

или

$$k_1 = k_2. \qquad (2.14)$$

Итак, *условие параллельности двух прямых заключается в равенстве их угловых коэффициентов.*

Данные прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда угол между ними равен $\frac{\pi}{2}$, т. е. $\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, откуда

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha_2=\operatorname{tg}\left(\alpha_1+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg}\alpha_1=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1}.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\alpha_1\cdot\operatorname{tg}\alpha_2=-1$, или

$$k_1\cdot k_2=-1.$$

Последнее соотношение обычно записывается в виде

$$k_1=-\frac{1}{k_2}. \tag{2.15}$$

Условие перпендикулярности двух прямых формулируется так: *прямые перпендикулярны, если их угловые коэффициенты обратны по абсолютной величине и противоположны по знаку.*

Пример 1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;\ 5)$ и параллельной прямой $3x-4y+15=0$.

Решение. Запишем уравнение данной прямой в виде

$$y=\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}.$$

Таким образом, угловой коэффициент $k=\frac{3}{4}$, а так как данная прямая параллельна искомой, то согласно условию параллельности двух прямых угловой коэффициент искомой прямой также равен $\frac{3}{4}$. Точка $A(2;\ 5)$, через которую проходит искомая прямая, известна, поэтому, подставляя в уравнение (2.8) значения $k=\frac{3}{4}$, $x_1=2$ и $y_1=5$, получим

$$y-5=\frac{3}{4}(x-2) \quad \text{или} \quad 4y-20=3x-6.$$

Уравнение искомой прямой имеет вид

$$3x-4y+14=0.$$

Пример 2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(-1;\ 1)$ и перпендикулярной прямой $3x-y+2=0$.

Решение. Обозначим искомый угловой коэффициент через k_1; угловой коэффициент данной прямой $k_2=3$. По условию перпендикулярности имеем $k_1=-\frac{1}{k_2}$, откуда $k_1=-\frac{1}{3}$. Согласно уравнению (2.8), получим

$$y-1=-\frac{1}{3}(x+1) \quad \text{или} \quad 3y-3=-x-1.$$

Уравнение прямой имеет вид

$$x+3y-2=0.$$

Упражнения

1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(3;\ -4)$ и параллельной прямой $2x+5y-7=0$.

Отв. $2x+5y+14=0$.

2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-3; 2)$ и перпендикулярной прямой $7x+4y-11=0$.

Отв. $4x-7y+26=0$.

3. Через точку пересечения прямых $x+y-1=0$ и $2x+3y+4=0$ провести прямую:

а) перпендикулярную прямой $3x-y+7=0$;

б) параллельную этой прямой.

Отв. а) $x+3y+11=0$; б) $3x-y-27=0$.

4. Найти уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника $M(5; -4)$, $N(-1; 3)$, $Q(-3; -2)$ и параллельных противоположным сторонам.

Отв. $5x-2y-33=0$; $x+4y-11=0$; $7x+6y+33=0$.

5. Даны точки $A(2; 3)$ и $B(-1; 0)$. Найти уравнение прямой, проходящей через точку B перпендикулярно к отрезку $\overline{AB}$.

Отв. $x+y+1=0$.

6. Даны вершины треугольника $A(2; 1)$, $B(-1; -1)$ и $C(3; 2)$. Найти уравнения высот этого треугольника.

Отв. $4x+3y-11=0$; $x+y+2=0$; $3x+2y-13=0$.

§ 7. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ПРЯМЫХ НА ПЛОСКОСТИ

Возможны три случая взаимного расположения прямых на плоскости:

1) прямые пересекаются (т. е. имеют одну общую точку);

2) прямые параллельны и не совпадают;

3) прямые совпадают.

Чтобы узнать, какой из этих случаев имеет место, исследуем систему двух уравнений первой степени

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2=0. \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

Результатам исследования дадим геометрическое толкование.

Каждое из уравнений системы (2.16) определяет прямую линию.

Если прямые пересекаются, т. е. имеют одну общую точку, то координаты этой точки должны удовлетворять обоим уравнениям системы (2.16). Следовательно, для нахождения координат точки пересечения прямых необходимо решить совместно их уравнения. Исключим сначала неизвестное x, умножив первое из уравнений на A_2, а второе — на A_1, и вычтем из первого уравнения второе:

$$(A_1B_2-A_2B_1)y+C_2A_1-C_1A_2=0. \tag{2.17}$$

Для исключения неизвестного y умножим первое из уравнений на B_2, а второе — на B_1 и вычтем второе уравнение из первого:

$$(A_1B_2-A_2B_1)x+C_1B_2-C_2B_1=0. \tag{2.18}$$

Если $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$, то

$$x=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1}, \quad y=\frac{C_1A_2-C_2A_1}{A_1B_2-A_2B_1}. \tag{2.19}$$

Соотношения (2.19) определяют координаты x, y точки пересечения двух прямых. Таким образом, если $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$, то прямые пересекаются.

Если $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, то соотношения (2.19) не имеют смысла и возможны два случая: прямые параллельны или совпадают.

Пусть $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, тогда

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}, \quad \text{или} \quad -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}.$$

С другой стороны,

$$-\frac{A_1}{B_1} = k_1 \quad \text{и} \quad -\frac{A_2}{B_2} = k_2.$$

Следовательно, $k_1 = k_2$, т. е. прямые параллельны. Если же $B_1 = B_2 = 0$, то прямые параллельны оси Oy и параллельны между собой. Итак, если $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, а следовательно, $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$, то прямые параллельны. Верно и обратное: если в уравнениях прямых соответствующие коэффициенты при текущих координатах пропорциональны, то прямые параллельны.

Частным случаем параллельности прямых является их совпадение. Рассмотрим уравнения (2.17) и (2.18). Если свободные члены этих уравнений равны нулю, т. е. $C_2A_1 - C_1A_2 = 0$ и $C_1B_2 - C_2B_1 = 0$, то $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Другими словами, коэффициенты при неизвестных и свободные члены уравнений системы (2.16) пропорциональны. В этом случае одно из уравнений системы получается из другого умножением всех его членов на некоторый общий множитель, т. е. уравнения системы (2.16) равносильны. Следовательно, рассматриваемые параллельные прямые совпадают.

Итак, *условием совпадения двух прямых является пропорциональность соответствующих коэффициентов их уравнений:*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Пример 1. Стороны треугольника AB, AC и BC заданы соответственно уравнениями $2x + 4y + 1 = 0$, $x - y + 2 = 0$ и $3x + 4y - 12 = 0$. Найти координаты вершин треугольника.

Решение. Координаты вершины A найдем как координаты точки пересечения сторон AB и AC треугольника. Для этого решим систему, составленную из уравнений, определяющих эти стороны:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 4y + 1 &= 0, \\ x - y + 2 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$x = -\frac{3}{2}, \quad y = \frac{1}{2}.$$

Вершина A имеет координаты $A\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Координаты вершины B найдем, решая систему уравнений, определяющих стороны AB и BC:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 4y + 1 &= 0, \\ 3x + 4y - 12 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда $x=13, y=-\frac{27}{4}$. Вершина B имеет координаты $B\left(13; -\frac{27}{4}\right)$. Координаты вершины C получим, решая систему из уравнений, определяющих стороны BC и AC:

$$\left.\begin{aligned} 3x+4y-12=0,\\ x-y+2=0. \end{aligned}\right\}$$

Вершина C имеет координаты $C\left(\frac{4}{7}; \frac{18}{7}\right)$.

Пример 2. Параллельны ли прямые $3x-6y+4=0$ и $5x-10y-1=0$?

Решение. Данные прямые параллельны, так как $\frac{3}{5}=\frac{-6}{-10}\neq\frac{4}{-1}$.

Пример 3. Исследовать прямые $3x+y-2=0$ и $9x+3y-6=0$.

Решение. Данные прямые совпадают, так как $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}=\frac{-2}{-6}$, т. е. $\frac{1}{3}=\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

§ 8. УРАВНЕНИЕ ПУЧКА ПРЯМЫХ

Часто встречаются задачи, когда центр пучка не задается непосредственно, а определена пара прямых, принадлежащих пучку. Координаты центра пучка вычисляются совместным решением уравнений данных прямых. Однако, если воспользоваться особой формой уравнения пучка прямых, то можно избежать вычисления координат центра пучка. Пусть даны прямые

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \quad \text{и} \quad A_2x+B_2y+C_2=0,$$

которые пересекаются в некоторой точке $S(x_0; y_0)$. Составим произвольно уравнение

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0, \tag{2.20}$$

где λ — произвольный параметр.

Уравнение (2.20) при любом значении λ определяет прямую линию, так как является уравнением первой степени относительно переменных x и y. Эта прямая проходит через точку $S(x_0; y_0)$, так как точка S, являясь точкой пересечения данных прямых, принадлежит каждой из них. Следовательно,

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1=0, \quad A_2x_0+B_2y_0+C_2=0.$$

Отсюда

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1+\lambda(A_2x_0+B_2y_0+C_2)=0.$$

Итак, координаты точки пересечения двух данных прямых удовлетворяют уравнению (2.20).

Таким образом, уравнение (2.20) при различных значениях λ определяет прямые, проходящие через центр $S(x_0; y_0)$, т. е. принадлежащие пучку.

Выясним, можно ли из уравнения (2.20) при надлежащем выборе λ получить уравнение любой из прямых пучка.

Пусть $A(\alpha; \beta)$ — произвольная точка плоскости, отличная от $S(x_0; y_0)$. Прямая, определяемая уравнением (2.20), проходит через точку $A(\alpha; \beta)$, если ее координаты удовлетворяют этому уравнению, т. е.

$$A_1\alpha + B_1\beta + C_1 + \lambda(A_2\alpha + B_2\beta + C_2) = 0.$$

Из последнего равенства следует, что при

$$\lambda = -\frac{A_1\alpha + B_1\beta + C_1}{A_2\alpha + B_2\beta + C_2} \tag{2.21}$$

получаем уравнение прямой, проходящей через произвольно выбранную точку плоскости $A(\alpha; \beta)$. Очевидно, что параметр λ нельзя подобрать только в случае, если точка $A(\alpha; \beta)$ лежит на прямой $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, так как тогда равенство (2.21) не имеет смысла (знаменатель обращается в нуль). Следовательно, уравнение (2.20) при различных значениях λ определяет все прямые пучки, кроме одной (второй из двух заданных). Уравнение последней прямой, очевидно, может быть получено из уравнения $\mu(A_1x + B_1y + C_1) + A_2x + B_2y + C_2 = 0$ при $\mu = 0$. Уравнение вида (2.20) называется *уравнением пучка прямых*.

Пример 1. Даны прямые $2x + 7y - 8 = 0$ и $3x + 2y + 5 = 0$, пересекающиеся в точке S. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку S под углом 45° к прямой $2x + 3y - 7 = 0$.

Решение. Данные прямые действительно пересекаются, так как $\frac{2}{3} \neq \frac{7}{2}$. Уравнение пучка прямых с центром S имеет вид

$$2x + 7y - 8 + \lambda(3x + 2y + 5) = 0. \tag{*}$$

Для того чтобы выделить в этом пучке прямую, вычислим λ. Представим уравнение (*) в виде

$$(2 + 3\lambda)x + (7 + 2\lambda)y + (5\lambda - 8) = 0. \tag{**}$$

Тогда угловой коэффициент искомой прямой

$$k_2 = -\frac{2 + 3\lambda}{7 + 2\lambda}. \tag{***}$$

Данная прямая имеет угловой коэффициент $k_1 = -2/3$. Так как угол наклона искомой прямой к данной равен 45°, то

$$1 = \frac{k_2 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}k_2} \quad \text{или} \quad 1 - \frac{2}{3}k_2 = k_2 + \frac{2}{3}.$$

Отсюда угловой коэффициент искомой прямой $k_2 = \frac{1}{5}$. Подставляя это значение в равенство (***), имеем

$$-\frac{2 + 3\lambda}{7 + 2\lambda} = \frac{1}{5}, \text{ откуда } \lambda = -1.$$

В результате подстановки $\lambda = -1$ в уравнение (**), получаем уравнение искомой прямой: $x - 5y + 13 = 0$.

§ 9. НОРМАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Пусть на плоскости задана какая-нибудь прямая линия. Проведем через начало координат прямую n, перпендикулярную данной, и выберем на ней положительное направление от начала координат в сторону данной прямой. Назовем эту прямую n-нормалью и обозначим буквой P точку пересечения нормали с данной прямой (рис. 2.12).

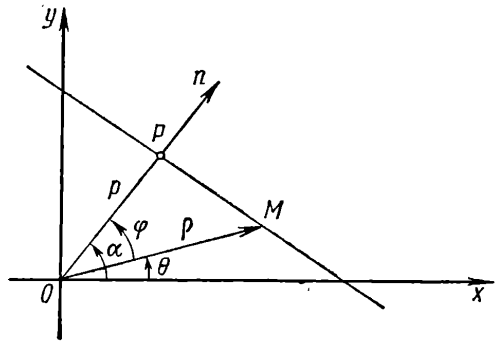

Рис. 2.12

Положение данной прямой относительно осей координат можно охарактеризовать, указав ее расстояние p от начала координат и угол α между осью Ox и нормалью n. Угол α называется *полярным углом* нормали n.

Составим уравнение данной прямой, считая неизвестными значения α и p,

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка прямой. Проекция отрезка $\overline{OM}$ на нормаль равна OP, а так как положительное направление нормали совпадает с направлением отрезка $\overline{OP}$, то величина этого отрезка выражается положительным числом p:

$$\text{пр}_n \overline{OM} = p. \tag{2.22}$$

Определим проекцию отрезка $\overline{OM}$ на нормаль n, выраженную через координаты точки M. Обозначим через φ угол наклона отрезка $\overline{OM}$ к нормали, а через ρ, θ — полярные координаты точки M. Тогда

$$\text{пр}_n \overline{OM} = p = \rho \cos \varphi = \rho \cos(\alpha - \theta) = \rho(\cos\alpha \cos\theta + \sin\alpha \sin\theta) =$$
$$= (\rho \cos\theta)\cos\alpha + (\rho \sin\theta)\sin\alpha = x\cos\alpha + y\sin\alpha.$$

Таким образом,

$$\text{пр}_n \overline{OM} = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \tag{2.23}$$

или

$$p = x\cos\alpha + y\sin\alpha. \tag{2.24}$$

Окончательно имеем

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \tag{2.25}$$

Уравнение (2.25) есть уравнение данной прямой, так как ему удовлетворяют координаты x, y любой точки этой прямой. Если точка M не лежит на данной прямой, то ее координаты уравнению (2.25) не

удовлетворяют, так как в этом случае $\text{пр}_n \overline{OM} \neq p$. Уравнение прямой вида (2.25) называется *нормальным уравнением прямой* и представляет собой особый вид записи уравнения прямой, имеющий большое практическое значение.

Одной из типовых задач аналитической геометрии является задача вычисления отклонения точки от прямой. Пусть дана произвольная прямая. Построим ее нормаль n и зададим положительное направление нормали. Пусть M_1 — какая угодно точка плоскости. Условимся называть *отклонением* данной точки от данной прямой число d, равное длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Число d имеет знак плюс, если точка и начало координат лежат по разные стороны от данной прямой, и минус, если они лежат по одну сторону от прямой. Для точек, лежащих на прямой, отклонение равно нулю. Пусть прямая задана уравнением в нормальном виде $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$. Найдем отклонение d точки $M_1(x_1; y_1)$ от прямой.

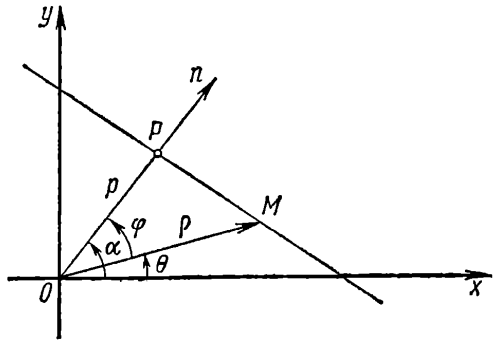

Рис. 2.13

Спроектируем точку M_1 на нормаль n и обозначим через Q её проекцию (рис. 2.13). Тогда $d = PQ = OQ - OP$, где PQ, OQ и OP — величины направленных отрезков $\overline{PQ}$, $\overline{OQ}$ и $\overline{OP}$, расположенных на нормали. С другой стороны, $OQ = \text{пр}_n \overline{OM_1}$; $OP = p$. Следовательно,

$$d = \text{пр}_n \overline{OM_1} - p. \tag{2.26}$$

Согласно соотношению (2.23) имеем

$$\text{пр}_n \overline{OM_1} = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha. \tag{2.27}$$

Рассматривая совместно равенства (2.26) и (2.27), получаем

$$d = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p. \tag{2.28}$$

Итак, чтобы получить отклонение точки $M_1(x_1; y_1)$ от данной прямой, необходимо в левую часть нормального уравнения этой прямой подставить вместо текущих координат координаты данной точки x_1, y_1. Очевидно, что расстояние точки от прямой есть абсолютная величина отклонения, которая вычисляется по формуле

$$|d| = |x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p|. \tag{2.29}$$

Для вычисления расстояния от точки до прямой необходимо прямую линию задать нормальным уравнением. Возникает вопрос: как привести общее уравнение прямой к нормальному виду? Пусть дано общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$. Запишем уравнение этой прямой в нормальном виде

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - \tilde{p} = 0.$$

Так как эти уравнения определяют одну и ту же прямую, то коэффициенты этих уравнений пропорциональны, т. е.

$$\frac{\cos\alpha}{A}=\frac{\sin\alpha}{B}=\frac{-p}{C}=\mu,$$

где μ — некоторый коэффициент.
Иначе говоря,

$$\mu A=\cos\alpha,\quad \mu B=\sin\alpha,\quad \mu C=-p. \tag{2.30}$$

Чтобы найти коэффициент μ, возведем первые два из равенств (2.30) в квадрат и сложим их. В результате получим

$$\mu^2(A^2+B^2)\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

Отсюда

$$\mu=\frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{2.31}$$

Коэффициент μ, при умножении на который общее уравнение прямой приобретает нормальный вид, называется *нормирующим множителем* этого уравнения. В соотношении (2.31) нужно брать знак, противоположный знаку свободного члена C общего уравнения прямой (как это видно из третьего равенства (2.30)). При $C=0$ знак можно брать произвольным. Итак, общее уравнение прямой приводится к нормальному виду путем умножения его на множитель μ.

Подставляя значение нормирующего множителя в равенства (2.30), получим

$$\cos\alpha=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}};\quad \sin\alpha=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\quad p=\frac{C}{\mp\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{2.32}$$

Пример 1. Найти расстояние от точки с координатами (2; 5) до прямой, определяемой уравнением

$$6x+8y-5=0.$$

Решение. Приведем уравнение прямой к нормальному виду По формуле (2.31)

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{1}{10}.$$

Умножая данное уравнение на нормирующий множитель, получим нормальное уравнение этой прямой: $\frac{6x+8y-5}{10}=0$. Отклонение

$$d=\frac{6\cdot 2+8\cdot 5-5}{10}=4{,}7.$$

Положительный знак отклонения указывает на то, что данная точка лежит от прямой по другую сторону от начала координат. Абсолютная величина отклонения дает искомое расстояние: $|d|=4{,}7$ ед.

Упражнения

1. Найти расстояние от точки (3; —1) до прямой $3x+5y+8=0$.

Отв. $\frac{6}{17}\sqrt{34}$ ед.

2. Найти расстояние между двумя параллельными прямыми $3x+4y-12=0$ и $6x+8y+26=0$.

Отв. 5 ед.

3. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A (—4; 3) и отстоящую от начала координат на расстояние 5 ед.

Отв. $4x-3y+25=0$.

4. Через точку M (—1; 2) провести прямую, отстоящую от точки (3; —1) на расстоянии 2 ед.

Отв. $y-2=\frac{-6+\sqrt{21}}{6}(x+1)$; $y-2=\frac{-6-\sqrt{21}}{6}(x+1)$.

5. Через точку M (1; 2) провести прямую, равноотстоящую от точек N (2; 3) и Q (4; —5).

Отв. $4x+y-6=0$; $3x+2y-7=0$.

6. Даны вершины треугольника M (—10; —13), N (—2; 3) и Q (2; 1). Найти длину перпендикуляра, опущенного из вершины N на медиану, проведенную из вершины Q.

Отв. 4 ед.

§ 10. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Иногда решение задач упрощается, если уравнение прямой задано в полярных координатах.

Положение прямой на плоскости может быть вполне определено, если задать ее расстояние p от полюса O и угол α между поляр-

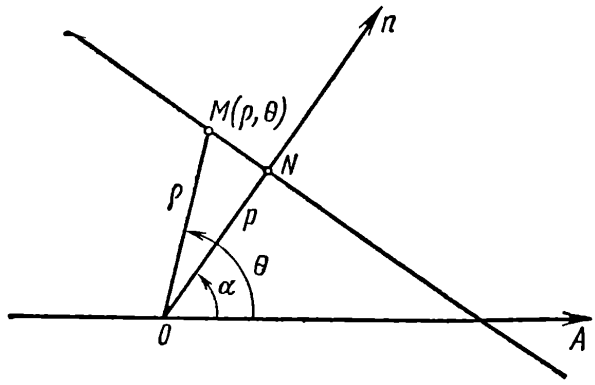

Рис. 2.14

ной осью и осью n, проходящей через полюс перпендикулярно прямой (рис. 2.14). Положительным направлением оси n будем считать направление от полюса к данной прямой (если прямая проходит через полюс, то положительное направление оси n может быть выбрано произвольно). Пусть $\mu(\rho; \theta)$ — любая точка данной

прямой. Очевидно, что все точки этой прямой обладают следующим свойством: проекция отрезка $\overline{OM}$ на ось n равна p. Итак, $ON = \text{пр}_n \overline{OM} = p$. С другой стороны,

$$\text{пр}_n \overline{OM} = OM \cdot \cos \angle MON = \rho \cos (\theta - \alpha).$$

Отсюда

$$\rho \cos (\theta - \alpha) = p. \qquad (2.33)$$

Уравнение (2.33) есть уравнение прямой в полярных координатах.

ГЛАВА III

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Линией второго порядка называется геометрическое место точек, определяемое уравнением второй степени.

Общее уравнение второй степени имеет вид

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{3.1}$$

где по крайней мере один из коэффициентов A, B или C отличен от нуля.

К числу линий второго порядка относятся окружность, эллипс, гипербола и парабола.

§ 1. ОКРУЖНОСТЬ

Окружностью называется геометрическое место точек, равноудаленных от одной постоянной точки, называемой *центром*. Выберем произвольно оси координат. Центр окружности поместим в точке C, координаты которой a, b. Пусть M — произвольная точка окружности, имеющая координаты x и y.

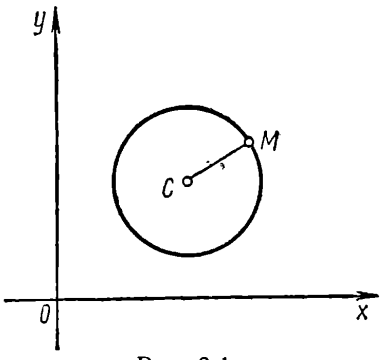

Рис. 3.1

Из определения окружности следует, что расстояние точки M от центра C окружности (рис. 3.1) есть величина постоянная, равна радиусу R, т. е.

$$CM = R. \tag{3.2}$$

Определяя длину отрезка $\overline{CM}$ как расстояние между двумя точками C и M, запишем равенство (3.2) с помощью текущих координат точки M:

$$R = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}. \tag{3.3}$$

Возводя обе части равенства (3.2) в квадрат, получим уравнение окружности в виде

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \tag{3.4}$$

Если начало координат выбрано в центре окружности, то $a = b = 0$ и уравнение (3.4) принимает вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{3.5}$$

Пример 1. Написать уравнение окружности с радиусом $\frac{2}{3}$ и с центром в точке $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}\right)$.

Решение. Согласно соотношению (3.4) имеем

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим

$$x^2+y^2-x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{12}=0,$$

или искомое уравнение окружности:

$$12x^2+12y^2-12x+8y-1=0.$$

Исследуем уравнение (3.4). Раскрывая скобки, имеем

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-R^2)=0, \tag{3.6}$$

или

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0, \tag{3.7}$$

где

$$D=-2a,\ E=-2b,\ F=a^2+b^2-R^2.$$

Уравнение (3.7) является уравнением второй степени.

Таким образом, окружность выражается уравнением второй степени относительно текущих координат.

Очевидно, что не всякое уравнение второй степени определяет окружность. Действительно, из уравнения (3.6) следует, что в уравнении окружности коэффициенты при квадратах координат равны, а член с произведением координат отсутствует. Итак, по виду данного уравнения второй степени можно решить, является оно уравнением окружности или нет. Например, уравнение $x^2+y^2+8x-6y=0$ определяет окружность, так как коэффициенты при квадратах текущих координат равны между собой, а член с произведением координат отсутствует. Чтобы построить эту окружность, предварительно нужно определить координаты ее центра и радиус. Для этого необходимо данное уравнение привести к виду (3.4).

Возьмем в данном уравнении члены, содержащие x, т. е. x^2+8x, и представим этот двучлен в виде

$$x^2+8x=(x+4)^2-16$$

(из членов, содержащих x, выделен полный квадрат линейного двучлена $x+4$). Далее возьмем члены, содержащие y, т. е. y^2-6y, и, преобразуя аналогично этот двучлен, получим

$$y^2-6y=(y-3)^2-9.$$

Тогда данное уравнение принимает вид

$$(x+4)^2-16+(y-3)^2-9=0.$$

Перенося свободные члены вправо, получаем

$$(x+4)^2+(y-3)^2=25.$$

Сравним полученное уравнение с уравнением окружности (3.4). Очевидно, что $a=-4$, $b=3$, $R=5$. Таким образом, центром окружности является точка $(-4; 3)$ и радиус окружности равен 5. По этим данным можно построить окружность.

Упражнения

1. Точка $M(3; -1)$ является центром окружности, отсекающей на прямой $2x-5y+18=0$ хорду, длина которой равна 6. Найти уравнение окружности.
Отв. $(x-3)^2+(y+1)^2=38$.

2. Найти уравнение окружности радиуса r, касающейся оси Oy в начале координат.
Отв. $x^2+y^2\pm 2rx=0$.

3. Найти уравнения окружностей радиуса $R=\sqrt{5}$, касающихся прямой $x-2y-1=0$ в точке $N(3; 1)$.
Отв. $(x-4)^2+(y+1)^2=5$; $(x-2)^2+(y-3)^2=5$.

4. Найти уравнение окружности, описанной около треугольника, стороны которого определяются уравнениями $x+2y-3=0$, $3x-y-2=0$, $2x-3y-6=0$.
Отв. $7x^2+7y^2-19x+11y-6=0$.

5. Найти уравнения окружностей, проходящих через начало координат и касающихся двух пересекающихся прямых $x+2y-9=0$ и $2x-y+2=0$.

Отв. $(x-2)^2+(y-1)^2=5$, $\left(x-\frac{22}{5}\right)^2+\left(y+\frac{31}{5}\right)^2=\frac{289}{5}$.

§ 2. ЭЛЛИПС. ЭКСЦЕНТРИСИТЕТ И ДИРЕКТРИСЫ ЭЛЛИПСА

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Необходимо, чтобы эта постоянная величина была больше расстояния между фокусами. Постоянная не может быть меньше расстояния между фокусами. Если же она равна расстоянию между фокусами, то рассматриваемым геометрическим местом точек является отрезок прямой, ограниченный данными фокусами.

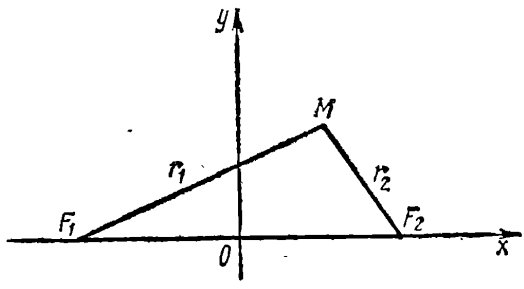

Рис. 3.2

Пусть M — произвольная точка эллипса с фокусами F_1 и F_2. Чтобы составить уравнение эллипса, ось абсцисс проведем через фокусы F_1 и F_2. Начало координат возьмем в середине отрезка, соединяющего фокусы (рис. 3.2). Расстояние между фокусами обозначим через $2c$. Тогда координаты фокусов F_1 и F_2 будут соответственно $(-c; 0)$ и $(+c; 0)$. Отрезки $\overline{F_1M}$ и $\overline{F_2M}$ называются

фокальными радиусами точки M. Обозначим фокальные радиусы точки M через r_1 и r_2. Постоянную величину (сумму фокальных радиусов) обозначим через $2a$. Таким образом, исходя из определения, для любой точки M эллипса

$$F_1M + F_2M = 2a \tag{3.8}$$

или

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{3.9}$$

Так как

$$F_1M + F_2M > F_1F_2,$$

то

$$2a > 2c,\ a > c. \tag{3.10}$$

Обозначим через x, y координаты произвольной точки M эллипса. Чтобы получить искомое уравнение эллипса, нужно в равенстве (3.9) заменить переменные r_1 и r_2 их выражениями через координаты x, y.

Выразим длины фокальных радиусов r_1 и r_2 по формуле расстояния между двумя точками:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},\quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{3.11}$$

Подставим найденные выражения фокальных радиусов r_1 и r_2 в уравнение (3.9):

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{3.12}$$

Это и есть искомое уравнение эллипса. Чтобы уравнение эллипса (3.12) приняло простейший вид, освободимся от радикалов. Перенося один из радикалов вправо, имеем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{3.13}$$

Возводя обе части равенства (3.13) в квадрат, получим

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2.$$

Приводя подобные, имеем

$$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

т. е.

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \tag{3.14}$$

Возведем в квадрат обе части равенства (3.14):

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

откуда

$$(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \tag{3.15}$$

Пусть $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (b — действительная величина, так как согласно выражению (3.10) $a^2 - c^2 > 0$). Возведем в квадрат обе части этого равенства, тогда уравнение (3.15) принимает вид

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (3.16)$$

Уравнение (3.16) называется *каноническим или простейшим уравнением эллипса.*

Уравнение (3.16) является уравнением второй степени. Следовательно, эллипс выражается уравнением второй степени относительно текущих координат.

Исследуем форму эллипса, анализируя его каноническое уравнение. Алгебраической особенностью уравнения (3.16) является то, что оно содержит только члены с четными степенями текущих координат. Следовательно, если точка $(x; y)$ находится на эллипсе, то и точки $(\pm x; \pm y)$ также являются точками эллипса при произвольном выборе знаков у координат. Таким образом, оси координат являются осями симметрии эллипса. Ось эллипса, на которой расположены фокусы, называется *фокальной осью.*

Чтобы исследовать форму эллипса, выразим из уравнения (3.16) величину y как функцию от x:

$$y=\pm\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}$$

или

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}. \qquad (3.17)$$

Так как эллипс симметричен относительно каждой из координатных осей, то достаточно рассмотреть его часть, лежащую в первой координатной четверти. Это значит, что этой части эллипса в уравнении (3.17) соответствует знак «+» и для всех ее точек $x\geqslant 0$.

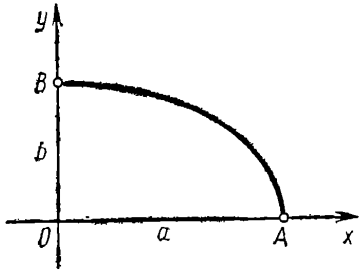

Рис. 3.3

Ограничимся построением графика функции

$$y=+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \text{ при } x\geqslant 0. \qquad (3.18)$$

Пусть $x=0$, тогда $y=b$. Точка $(0; b)$ является самой левой точкой рассматриваемой кривой. При увеличении x значения y в выражении (3.18) убывают. При этом точка $M(x; y)$, описывающая рассматриваемую кривую, движется вправо и вниз (рис. 3.3). При $x=a$ имеем $y=0$, т. е. точка $M(x; y)$ совпадет с точкой $A(a; 0)$, лежащей на оси Ox. Дальнейшее увеличение x невозможно, так как в этом случае значение y в выражении (3.18) становится мнимым. Отсюда следует, что точка A является самой правой точкой графика. Таким образом, дуга $\overset{\frown}{BA}$ является частью эллипса, расположенной в первой координатной четверти. Производя зеркальные отражения дуги $\overset{\frown}{BA}$ относительно координатных осей, получим

весь эллипс, который имеет форму выпуклого овала с двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии (рис. 3.4). Точка пересечения осей симметрии — центр симметрии — называется *центром эллипса*. Точки, в которых эллипс пересекает оси координат, называются его *вершинами*.

Для эллипса, заданного уравнением (3.16), фокальная ось совпадает с осью Ox, а центр — с началом координат. Отрезок $\overline{AA'} = 2a$ называется *большой осью* эллипса, а отрезок $\overline{BB'} = 2b$ — *малой осью* эллипса. Соответственно a и b называют *большой* и *малой полуосями* эллипса.

Если фокусы эллипса расположены на оси Ox, то $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, следовательно, $a > b$.

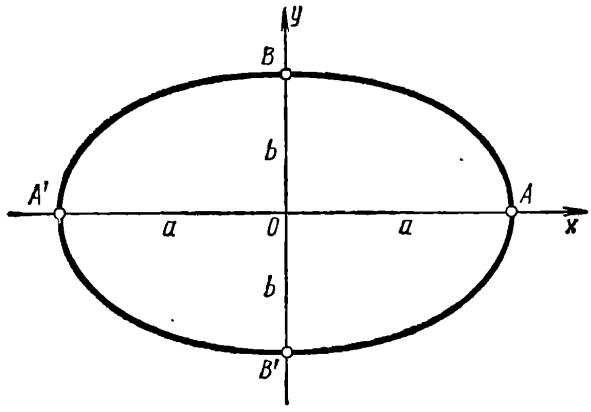

Рис. 3.4

При $a = b$ уравнение (3.16) принимает вид $x^2 + y^2 = a^2$. В этом случае уравнение определяет окружность радиуса a (с центром в начале координат). Таким образом, окружность можно рассматривать как частный случай эллипса.

Рассмотрим произвольную точку $M(x; y)$, лежащую на данном эллипсе. Если r_1 и r_2 — фокальные радиусы этой точки, то

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

На основании равенства (3.14) имеем

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a} x$$

или

$$r_2 = a - \frac{c}{a} x. \tag{3.19}$$

Величину $\frac{c}{a}$, входящую в равенство (3.19), называют *эксцентриситетом эллипса* и обозначают буквой ε. Таким образом, эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами

эллипса к длине его большой оси, т. е.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}. \tag{3.20}$$

Так как $a > c$, то эксцентриситет эллипса всегда меньше единицы. Возводя в квадрат обе части равенства (3.20), имеем

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

Отсюда

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \tag{3.21}$$

т. е. эксцентриситет определяется отношением осей эллипса, а это означает, что эксцентриситет характеризует форму эллипса. При $a = b$ из равенства (3.21) следует, что $\varepsilon = 0$.

Таким образом, равенство (3.19) окончательно можно записать в виде

$$r_2 = a - \varepsilon x. \tag{3.22}$$

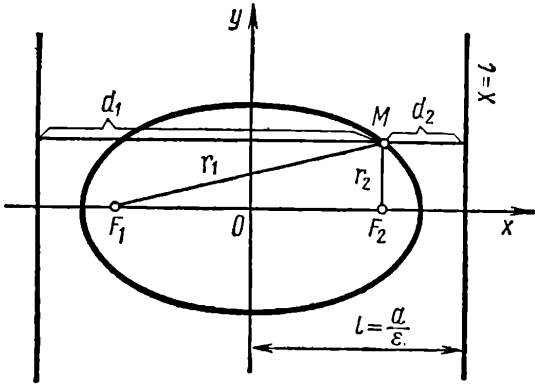

Рис. 3.5

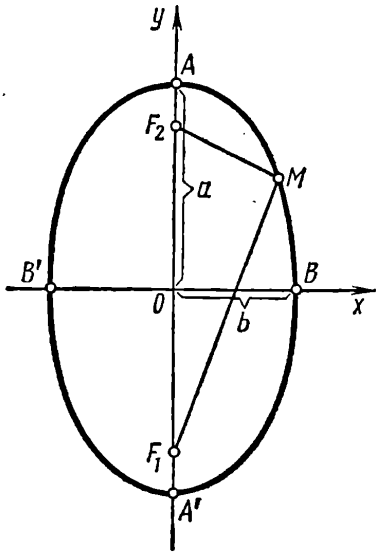

Рис. 3.6

По определению эллипса $r_1 + r_2 = 2a$. Отсюда, учитывая соотношение (3.22), получим

$$r_1 = a + \varepsilon x. \tag{3.23}$$

Рассмотрим прямую $x = l$ $(l > a)$, параллельную оси Oy. Найдем расстояние d_2 произвольной точки $M(x; y)$ эллипса от прямой $x = l$ (рис. 3.5). Значение одного из фокальных радиусов точки $r_2 = a - \varepsilon x$. Тогда $d_2 = l - x$. Найдем отношение

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{a - \varepsilon x}{l - x} = \varepsilon \frac{\frac{a}{\varepsilon} - x}{l - x}. \tag{3.24}$$

Если $l = \frac{a}{\varepsilon}$, то отношение (3.24) сохраняет постоянное значение, равное ε.

В силу симметрии такое заключение можно сделать относительно левого фокуса F_1 и прямой, определяемой уравнением $x=-\frac{a}{\varepsilon}$.

Две прямые, перпендикулярные к большой оси эллипса и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от него, называются *директрисами эллипса*. Они обладают следующим свойством: отношение расстояний любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная ε.

Пример 1. Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса, уравнение которого $9x^2+4y^2=36$.

Решение. Разделим данное уравнение на 36 и приведем его к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Отсюда следует, что большая полуось эллипса $a=3$, а малая полуось $b=2$. При этом большая ось эллипса и его фокусы F_1 и F_2 расположены на оси Oy (рис. 3.6). Так как $c=\sqrt{a^2-b^2}$, то $c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$. Следовательно, координаты фокусов $F_1(0;\ -\sqrt{5})$, $F_2(0;\ \sqrt{5})$. Эксцентриситет эллипса

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Пример 2. Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что его большая полуось $a=12$, а эксцентриситет $\varepsilon=0{,}5$. Найти расстояние между фокусами эллипса.

Решение. Возведем в квадрат равенство (3.21):

$$\varepsilon^2=1-\frac{b^2}{a^2},$$

откуда

$$b^2=a^2(1-\varepsilon^2).$$

В данном случае $b^2=144\,(1-0{,}25)=108$. Следовательно, каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{108}=1.$$

Так как $\varepsilon=\frac{c}{a}$, то $c=a\cdot\varepsilon=12\cdot 0{,}5=6$ и расстояние между фокусами $F_1F_2=2c=12$.

Упражнения

1. Уравнение эллипса $9x^2+25y^2=225$. Найти:
а) его полуоси; б) фокусы; в) эксцентриситет; г) уравнения директрис.
Отв. а) 5 и 3; б) $F_1(-4;\ 0)$ и $F_2(4;\ 0)$; в) $\varepsilon=4/5$; г) $x=\pm\ 25/4$.

2. Найти площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $x^2+5y^2=20$, а две другие совпадают с концами его малой оси.
Отв. 16 кв. ед.

3. Уравнение эллипса $9x^2+5y^2=45$. Найти:
а) его полуоси; б) фокусы; в) эксцентриситет; г) уравнения директрис.
Отв. а) $\sqrt{5}$ и 3; б) $F_1(0;\ -2)$ и $F_2(0;\ 2)$; в) $\varepsilon=2/3$; г) $y=\pm\ 9/2$.
4. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon=2/3$, фокальный радиус точки M эллипса равен 10. Найти расстояние точки M до односторонней с этим фокусом директрисы.
Отв. 15 ед.
5. Найти уравнение эллипса, эксцентриситет которого $\varepsilon=1/3$ и абсцисса одного из фокусов равна 3/2.
Отв. $8x^2+9y^2=162$.

§ 3. ГИПЕРБОЛА. АСИМПТОТЫ. ЭКСЦЕНТРИСИТЕТ И ДИРЕКТРИСЫ ГИПЕРБОЛЫ

Гиперболой называется геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Необходимо, чтобы эта постоянная была положительной и ее величина была меньше расстояния между фокусами. Если же она равна расстоянию между фокусами, то рассматриваемое геометрическое место состоит из совокупности тех точек прямой, проходящей через фокусы, которые лежат вне отрезка, соединяющего фокусы. Если эта постоянная величина, равная разности расстояний от двух данных точек, равна нулю, то геометрическим местом является перпендикуляр, проведенный к отрезку, соединяющему фокусы в его середине. Пусть M — произвольная точка гиперболы с фокусами F_1 и F_2. Чтобы составить уравнение гиперболы, проведем ось абсцисс через фокусы F_1 и F_2. Начало координат выберем в середине отрезка, соединяющего фокусы (рис. 3.7). Расстояние между фокусами для удобства вывода обозначим через $2c$. Тогда координаты фокусов F_1 и F_2 будут соответственно $(-c;\ 0)$ и $(+c;\ 0)$. Отрезки $\overline{F_1M}$ и $\overline{F_2M}$ называются *фокальными радиусами* точки M. Обозначим фокальные радиусы точки M через r_1 и r_2. Разность фокальных радиусов (величину постоянную) обозначим через $2a$. Исходя из определения, для любой точки M гиперболы в случае, если точка находится ближе к фокусу F_2, имеем

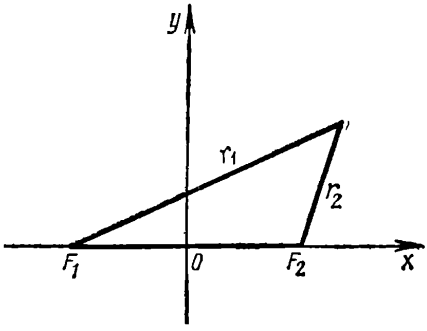

Рис. 3.7

$$F_1M-F_2M=2a \text{ или } r_1-r_2=2a.$$

Если точка M находится ближе к фокусу F_2, то $F_2M-F_1M=2a$, следовательно, $r_2-r_1=2a$. В общем случае

$$r_1-r_2=\pm\ 2a. \tag{3.25}$$

Так как $F_1M-F_2M<F_1F_2$ и $F_2M-F_1M<F_1F_2$, то

$$2a<2c, \text{ или } a<c. \tag{3.26}$$

Обозначим через x и y координаты произвольной точки M гиперболы. Чтобы получить искомое уравнение гиперболы, нужно в равенстве (3.25) заменить переменные r_1 и r_2 их выражениями через координаты x, y. Выразим длины фокальных радиусов r_1 и r_2 по формуле расстояния между двумя точками:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Подставляя найденные выражения фокальных радиусов r_1 и r_2 точки M гиперболы в выражение (3.25), получим

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a.$$

Это и есть искомое уравнение гиперболы. Упростим это выражение, освободившись от радикалов. Перенося один из радикалов вправо, имеем

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Возводя обе части последнего равенства в квадрат, получим

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2.$$

Приводя подобные, имеем

$$4cx = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

или

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = cx - a^2. \tag{3.27}$$

Возводя в квадрат обе части этого равенства, находим

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4,$$

откуда

$$(a^2-c^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2\,(a^2-c^2).$$

Умножая на -1, получим

$$(c^2-a^2)\,x^2 - a^2y^2 = a^2\,(c^2-a^2). \tag{3.28}$$

Пусть $b = \sqrt{c^2-a^2}$ или $b^2 = c^2-a^2$. Величина b действительна, так как согласно выражению (3.26) $c^2-a^2 > 0$. Тогда уравнение (3.28) принимает вид

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.29}$$

Последнее уравнение называется *каноническим* или *простейшим уравнением гиперболы.*

Уравнение (3.29) является уравнением второй степени. Следовательно, гипербола выражается уравнением второй степени относительно текущих координат.

Исследуем форму гиперболы, анализируя ее каноническое уравнение. Уравнение (3.29) содержит члены только с четными степе-

нями текущих координат. Следовательно, если точка $(x; y)$ находится на гиперболе, то и точка $(\pm x; \pm y)$ также находится на гиперболе при произвольном выборе знаков у координат. Таким образом, оси координат являются осями симметрии гиперболы. Ось гиперболы, на которой расположены фокусы, называется *фокальной осью.*

Чтобы исследовать форму гиперболы, выразим из уравнения (3.29) величину y как функцию от x:

$$y = \pm \sqrt{b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)},$$

или

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \tag{3.30}$$

Так как гипербола симметрична относительно каждой из координатных осей, то достаточно рассмотреть ее часть, лежащую в первой координатной четверти. Это значит, что этой части гиперболы соответствует знак «+» в уравнении (3.30) и для ее точек $x \geqslant 0$. Таким образом, необходимо построить при $x \geqslant 0$ график функции

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \tag{3.31}$$

Пусть $x = 0$. Подставляя $x = 0$ в правую часть равенства (3.31), получим $y = \frac{b}{a}\sqrt{-a^2}$, т. е. мнимое число. При возрастании x величина y остается мнимой до тех пор, пока x не станет равным a.

Полагая в правой части равенства (3.31) $x = a$, имеем $y = 0$. Следовательно, точка $A(a; 0)$ является самой левой точкой графика. При дальнейшем возрастании x величина y является действительной и положительной. Это видно из равенства (3.31), так как при $x > a$ имеем $x^2 - a^2 > 0$. Из равенства (3.31) следует также, что y является возрастающей функцией от x (если $x \geqslant a$). Наконец, из равенства (3.31) следует, что при бесконечном возрастании x происходит бесконечное возрастание y ($y \to +\infty$ при $x \to +\infty$). Таким образом, при возрастании x, начиная от $x = a$, переменная точка $M(x; y)$, описывающая кривую, движется все время вправо и вверх, имея своим начальным положением точку $A(a; 0)$. Удаление же точки M как вправо от оси Oy, так и вверх от оси Ox, является бесконечным (рис. 3.8).

Производя зеркальное отражение дуги, изображенной на рис. 3.8, относительно координатных осей, получим всю гиперболу, которая состоит из двух отдельных ветвей — левой и правой (рис. 3.9).

Точка пересечения осей симметрии — центр симметрии — называется *центром гиперболы.* Точки, в которых гипербола пересекает оси координат, называются *вершинами гиперболы.* Найдем эти вершины. Пусть в уравнении (3.29) $y = 0$, тогда $\frac{x^2}{a^2} = 1$, или $x^2 = a^2$, откуда $x = \pm a$. Таким образом, точки $A(a; 0)$ и $A'(-a; 0)$ являются вершинами гиперболы (3.9). Расстояние между вершинами равно $2a$.

Полагая затем в уравнении (3.29) $x=0$, получим $-\frac{y^2}{b^2}=1$, или $y^2=-b^2$, откуда $y=\pm\sqrt{-b^2}=\pm b\sqrt{-1}$, т. е. для y получены мнимые значения, а это значит, что гипербола не пересекает ось Oy. Поэтому ось симметрии, на которой расположены вершины гиперболы (в данном случае ось абсцисс), называется *действительной осью симметрии* или *фокальной осью*, а ось симметрии, которая не пересекает гиперболы (в данном случае ось ординат), называется *мнимой осью симметрии*. Если на мнимой оси симметрии гиперболы отложить по обе стороны от ее центра отрезки $\overline{OD}$ и $\overline{OE}$ длиной b (рис. 3.9), то отрезок $\overline{DE}=2b$ называется *мнимой осью гиперболы*. Отрезок $\overline{AA'}=2a$ называется *действительной осью гиперболы*. Величины a и b называются соответственно *действительной* и *мнимой полуосями гиперболы*.

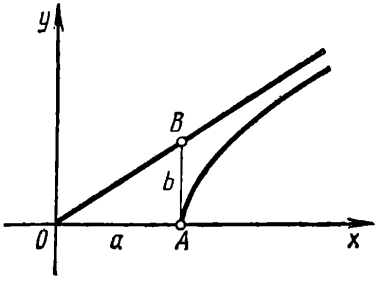

Рис. 3.8

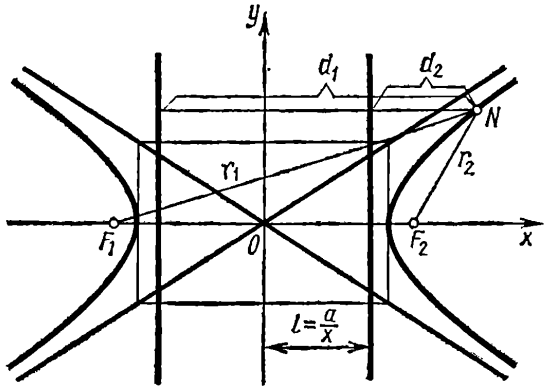

Рис. 3.9

Для исследования формы гиперболы большое значение имеют две характерные прямые, называемые *асимптотами*. Разрешим уравнение (3.29) относительно y, полагая x и y положительными:

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1, \text{ т. е. } y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \qquad (3.32)$$

Сравним это уравнение с уравнением $y=\frac{b}{a}x$ (это уравнение прямой, проходящей через начало координат). Рассмотрим две точки $M(x;\ y')$ и $M(x;\ y)$, имеющие одинаковую абсциссу x и расположенные соответственно на прямой и на гиперболе. Определим длину отрезка $\overline{MN}$. Очевидно, что $MN=y'-y$, так как $y'>y$ (рис. 3.9). Учитывая условия расположения точек N и M, имеем $y'=\frac{b}{a}x$; $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. Следовательно,

$$y'-y=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Таким образом,

$$MN=y'-y=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})=\frac{b}{a}\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}},$$

или

$$MN = y' - y = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}. \qquad (3.33)$$

Проанализируем полученное выражение, предполагая $x \longrightarrow +\infty$. Числитель этого выражения есть величина постоянная, а знаменатель при $x \longrightarrow +\infty$ также стремится к положительной бесконечности. Таким образом, правая часть равенства (3.33) стремится к нулю при $x \longrightarrow +\infty$. Следовательно, $y' - y = MN \longrightarrow 0$.

Опустим из точки N гиперболы перпендикуляр на прямую $y = \frac{b}{a}x$ и обозначим основание его через P. Следовательно, NP есть расстояние от точки N до прямой. Очевидно (рис. 3.9), что $NP < MN$. Так как $MN \longrightarrow 0$ при $x \longrightarrow +\infty$, то и $NP \longrightarrow 0$. Отсюда следует, что если точка N, двигаясь по гиперболе, в I квадранте удаляется в бесконечность, то ее расстояние NP до прямой $y = \frac{b}{a}x$ уменьшается и стремится к нулю. В этом случае говорят, что график функции $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ асимптотически приближается к прямой $y = \frac{b}{a}x$ при $x \longrightarrow +\infty$, т. е. $y = \frac{b}{a}x$ есть асимптота графика функции $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. То же будет происходить при движении точки N по гиперболе в III квадранте, так как имеет место симметрия относительно начала координат O. Гипербола симметрична относительно оси Oy, поэтому, очевидно, имеется другая прямая $y = -\frac{b}{a}x$, симметрично расположенная с прямой $y = \frac{b}{a}x$, к которой асимптотически будет приближаться точка M при движении по гиперболе и удалении в бесконечность во II и IV квадрантах.

Таким образом, гипербола имеет две асимптоты

$$y = \frac{b}{a}x \text{ и } y = -\frac{b}{a}x. \qquad (3.34)$$

Асимптоты гиперболы являются диагоналями прямоугольника, одна из сторон которого параллельна оси Ox и равна $2a$, другая — параллельна оси Oy и равна $2b$, а центр лежит в начале координат (рис. 3.9). Поэтому при построении гиперболы предварительно необходимо построить ее асимптоты. Очевидно, что если фокусы гиперболы расположены на оси Oy, то она определяется уравнением

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \qquad (3.35)$$

Это уравнение также называется каноническим уравнением гиперболы. Вид такой гиперболы показан на рис. 3.10.

Гиперболы, определяемые уравнениями (3.29) и (3.35) при одних и тех же значениях a и b в одной и той же системе координат, называются *сопряженными* друг с другом.

В частном случае при $a=b$ уравнение (3.29) принимает вид

$$x^2-y^2=a^2. \tag{3.36}$$

Уравнение (3.36) является *уравнением равносторонней гиперболы*. В этом случае основной прямоугольник гиперболы есть квадрат, следовательно, асимптоты равносторонней гиперболы перпендикулярны друг к другу*.

Рассмотрим произвольную точку $N(x; y)$, лежащую, например, на правой ветви гиперболы (рис. 3.9).

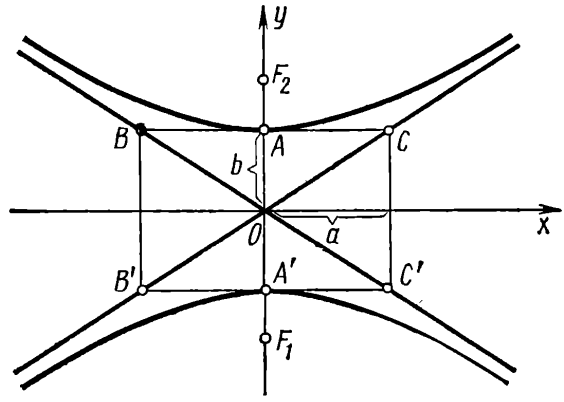

Рис. 3.10

Если r_1 и r_2—фокальные радиусы этой точки, то

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2} \text{ и } r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Воспользуемся равенством (3.27), из которого, учитывая, что точка $N(x; y)$ расположена на правой ветви гиперболы (знак «+» в правой части), имеем

$$r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\frac{c}{a}x-a. \tag{3.37}$$

Величину $\frac{c}{a}$, входящую в последнее равенство, называют *эксцентриситетом гиперболы* и обозначают буквой ε. Таким образом, эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами этой гиперболы к расстоянию между ее вершинами, т. е.

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}. \tag{3.38}$$

---

* Если прямоугольную систему координат повернуть на угол 45°, т. е. асимптоты кривой в прежней системе координат xOy совместить с новой системой координат XOY, то уравнение (3.35) примет вид $XY=\frac{a^2}{2}=k$ (где k—постоянная величина) и геометрически будет выражать обратную пропорциональную зависимость между переменными X и Y.

Так как $a < c$, то $\varepsilon > 1$, т. е. эксцентриситет гиперболы больше единицы. Возводя равенство (3.38) в квадрат, имеем

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

откуда

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \tag{3.39}$$

Итак, эксцентриситет гиперболы определяется отношением $\frac{b}{a}$, где b и a — стороны основного прямоугольника гиперболы. Следовательно, эксцентриситет гиперболы характеризует форму гиперболы.

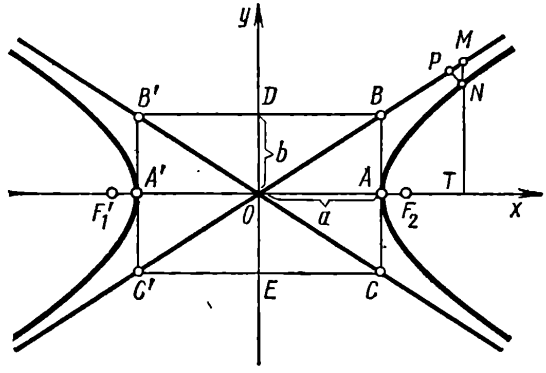

Рис. 3.11

В случае равносторонней гиперболы ($a = b$) из равенства (3.38) находим $\varepsilon = \sqrt{2}$. Таким образом, равенство (3.37) окончательно принимает вид

$$r_2 = \varepsilon x - a. \tag{3.40}$$

Для правой ветви гиперболы по определению имеем $r_1 - r_2 = 2a$. Отсюда, учитывая выражение (3.40), имеем

$$r_1 = \varepsilon x + a.$$

Если же точка $N(x; y)$ лежит на левой ветви гиперболы, то

$$r_1 = -\varepsilon x - a \text{ и } r_2 = -\varepsilon x + a.$$

Для левой ветви гиперболы по определению имеем

$$r_1 - r_2 = -2a.$$

Рассмотрим прямую $x = l$ ($l < a$), параллельную оси Oy. Найдем расстояние d_2 произвольной точки $N(x; y)$ гиперболы от прямой $x = l$ (рис. 3.11).

Значение одного из фокальных радиусов точки r_2 (правая ветвь) согласно равенству (3.40) будет $r_2 = \varepsilon x - a$. Очевидно, что $d_2 = x - l$. Найдем отношение

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{\varepsilon x - a}{x - l} = \varepsilon \frac{x - \frac{a}{\varepsilon}}{x - l}. \tag{3.41}$$

Если $l=\frac{x}{a}$, то отношение (3.41) сохраняет постоянное значение, равное ε. В силу симметрии такое же заключение можно сделать и относительно левого фокуса и прямой, определяемой уравнением $x=-\frac{a}{\varepsilon}$. Две прямые, перпендикулярные к действительной оси гиперболы и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от него, называются *директрисами гиперболы*. Директрисы обладают следующим свойством: отношение расстояний любой точки гиперболы до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная ε.

Пример 1. Определить вершины, фокусы, эксцентриситет и асимптоты гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$.

Решение. Запишем данное уравнение гиперболы в виде

$$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1.$$

Сравнивая это уравнение с равенством (3.35), видим, что фокусы данной гиперболы расположены на оси Oy, ее действительная полуось $a=3$, а мнимая полуось $b=4$. Асимптоты $y=\pm\frac{3}{4}x$. Вершины данной гиперболы расположены в точках с координатами $A_1(0;\ -3)$, $A_2(0;\ 3)$, $B_1(-4;\ 0)$, $B_2(4;\ 0)$. Находим величину c: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=5$. Поэтому фокусы гиперболы расположены в точках $F_1(0;\ -5)$, $F_2(0;\ 5)$. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}$.

Пример 2. Асимптоты гиперболы имеют уравнения $4y\pm 3x=0$, а расстояние между фокусами равно 20. Написать каноническое уравнение гиперболы.

Решение. Разрешим уравнения асимптот относительно y и сравним эти уравнения с равенством (3.34):

$$y=\pm\frac{3}{4}x,\quad \text{где}\quad \frac{b}{a}=\frac{3}{4}.$$

Кроме того, $F_1F_2=2c=20$, т. е. $c=10$. Так как для гиперболы $c^2=a^2+b^2$, то для нахождения a и b следует решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{b}{a}&=\frac{3}{4},\\ a^2+b^2&=100,\end{aligned}\right\}$$

откуда $a=8$, $b=6$. Следовательно, каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1.$$

Упражнения

1. Найти уравнение гиперболы, фокусы которой имеют координаты $(\pm 4;\ 0)$, и действительная ось равна 6.

Ответ. $7x^2-9y^2=63$.

2. Дана гипербола $16x^2-9y^2=144$. Найти:

а) полуоси a и b; б) фокусы; в) эксцентриситет; г) уравнения асимптот; д) уравнения директрис.

Отв. а) $a=3$; $b=4$; б) $F_1(-5;\ 0)$ и $F_2(5;\ 0)$; в) $\varepsilon=\frac{5}{3}$; г) $y=\pm\frac{4}{3}x$; д) $x=\pm\frac{9}{5}$.

3. Найти уравнение гиперболы, проходящей через точку (2; 1), асимптоты которой $y=\pm\frac{3}{4}x$.

Отв. $9x^2-16y^2=20$.

4. Найти уравнение равносторонней гиперболы, проходящей через точку (3; —1).

Отв. $x^2-y^2=8$.

5. Найти площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ и прямой $9x+2y-24=0$.

Отв. 12 кв. ед.

6. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon=2$, фокальный радиус ее точки N, проведенный из некоторого фокуса, равен 16. Найти расстояние точки N до односторонней с фокусом директрисы.

Отв. 8 ед.

§ 4. ПАРАБОЛА. ЭКСЦЕНТРИСИТЕТ И ДИРЕКТРИСА ПАРАБОЛЫ

Параболой называется геометрическое место точек, расстояние которых до постоянной точки, называемой *фокусом*, равно расстоянию до некоторой прямой, называемой *директрисой* (предполагается, что фокус не лежит на директрисе).

Пусть M — произвольная точка параболы с фокусом F. Чтобы составить уравнение параболы, ось абсцисс проведем через фокус F. Начало координат расположим между фокусом и директрисой (рис. 3.12). Расстояние от фокуса до директрисы обозначим через p. Величину p называют *параметром параболы*.

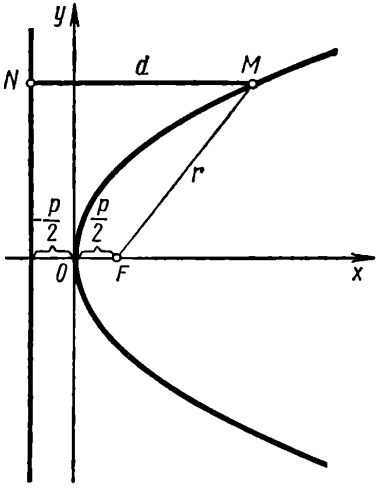

Рис. 3.12

При данном расположении начала системы очевидно, что фокус F имеет координаты $\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$. Отрезок $\overline{FM}$ называется *фокальным радиусом* точки M. Обозначим фокальный радиус точки M через r. Расстояние от точки M до директрисы обозначим через d. Таким образом, исходя из определения, для любой точки M параболы

$$r=d. \qquad (3.42)$$

Обозначим через x и y координаты произвольной точки M параболы. Чтобы получить искомое уравнение параболы, нужно в равенстве (3.42) заменить переменные r, d их выражениями через координаты

x и y. Выразим длину фокального радиуса r и величину d по формуле расстояния между двумя точками:

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}.$$

Основание перпендикуляра, опущенного из точки M на директрису, обозначим через N. Очевидно, точка N имеет координаты $\left(-\frac{p}{2}; y\right)$. Следовательно,

$$d=MN=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}=x+\frac{p}{2}. \qquad (3.43)$$

Подставляя найденные выражения для фокального радиуса r и величину d в равенство (3.42), получим

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}.$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат:

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2,$$

или

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

откуда

$$y^2=2px. \qquad (3.44)$$

Уравнение (3.44) называется *каноническим уравнением параболы*. Уравнение (3.44) является уравнением второй степени. Следовательно, парабола выражается уравнением второй степени относительно текущих координат.

Проведем исследование формы параболы, анализируя ее каноническое уравнение. Это уравнение содержит текущую координату y только в четной степени, следовательно, парабола симметрична относительно оси Ox.

Чтобы исследовать форму параболы, представим уравнение (3.44) в виде

$$y=\pm\sqrt{2px}. \qquad (3.45)$$

Так как парабола симметрична относительно оси Ox, то достаточно рассмотреть только часть, лежащую в верхней полуплоскости. Этой части параболы соответствует знак «+» в уравнении (3.45), т. е.

$$y=+\sqrt{2px}. \qquad (3.46)$$

Уравнение (3.46) дает мнимые значения при отрицательных значениях x. Следовательно, все точки параболы расположены правее оси Oy. При $x=0$ имеем $y=0$. Таким образом, парабола проходит через начало координат, причем точка $O(0; 0)$ является самой левой ее точкой.

При увеличении x (начиная от нуля) значения y в равенстве (3.46) будут все время возрастать ($y \to +\infty$ при $x \to +\infty$).

Таким образом, при возрастании x переменная точка $M(x; y)$, описывающая кривую, движется все время вправо и вверх, начальным положением является точка O (0; 0). Удаление же точки M как вправо от оси Oy, так и вверх от оси Ox, является бесконечным (рис. 3.13).

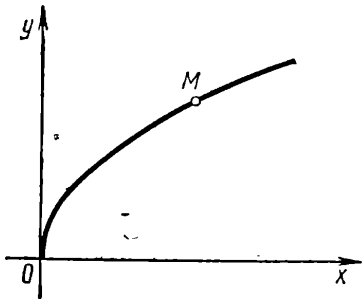

Рис. 3.13

Производя зеркальное отражение дуги, изображенной на рис. 3.13, относительно оси Ox, получим всю параболу.

Таким образом, парабола имеет одну ось симметрии, которую называют *осью параболы*. Точка пересечения параболы со своей осью называется *вершиной параболы*. В частности, для параболы, заданной уравнением (3.44), вершиной является начало координат.

Рассмотрим уравнение

$$y^2 = -2px, \tag{3.47}$$

Очевидно, что уравнение (3.47) может быть приведено к уравнению (3.44) путем замены x на $-x$, т. е. уравнение (3.47) также

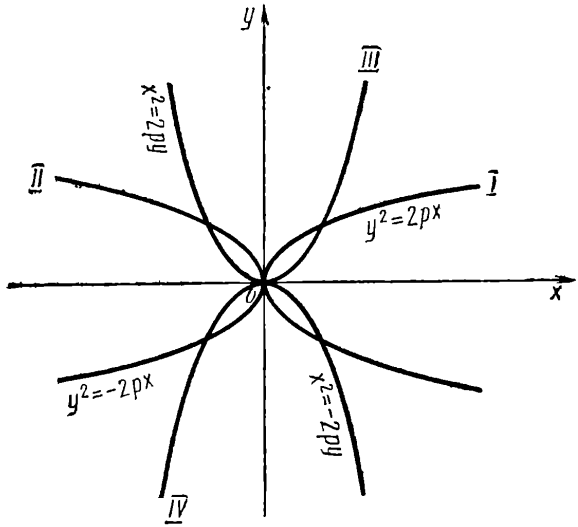

Рис. 3.14

определяет параболу, ось которой совмещена с осью Ox, а вершина — с началом координат. Однако эта парабола лежит в левой полуплоскости (рис. 3.14).

Каждое из уравнений

$$x^2 = 2py, \quad x^2 = -2py \quad (p > 0) \tag{3.48}$$

определяет параболу, вершина которой находится в начале координат, расположенную симметрично относительно оси Oy. Уравнения (3.48) также называются каноническими уравнениями параболы. Парабола, определяемая уравнением $x^2 = 2py$, называется *восходящей*, а парабола, определяемая уравнением $x^2 = -2py$, — *нисходящей* (рис. 3.14). В соответствии с определением, парабола есть геометрическое место точек, равноотстоящих от данной точки — фокуса и данной прямой — директрисы, т. е. $r = d$. Таким образом, отношение $\frac{r}{d} = 1$. Итак, эксцентриситет параболы равен единице. Уравнение директрисы параболы имеет вид

$$x = -\frac{p}{2}, \tag{3.49}$$

если оси координат выбраны, как показано на рис. 3.12.

Пример 1. Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку $A(2; 4)$ и симметрична относительно оси Ox. Написать уравнение параболы.

Решение. Так как парабола симметрична относительно оси Ox и проходит через точку A, абсцисса которой положительна, то она имеет вид параболы, изображенной на рис. 3.12.

Подставляя координаты точки A в уравнение параболы $y^2 = 2px$, получим $16 = 2p \cdot 2$, или $p = 4$. Следовательно, искомое уравнение параболы имеет вид $y^2 = 8x$. Фокус этой параболы $F(2; 0)$, а уравнение директрисы $x = -2$.

Пример 2. Парабола с вершиной в начале координат проходит через точку $B(1; -2)$ и симметрична относительно оси Oy. Написать уравнение параболы.

Решение. Данная парабола симметрична относительно оси Oy и проходит через точку B с отрицательной ординатой, поэтому она имеет вид параболы, изображенной на рис. 3.14.

Подставляя координаты точки B в уравнение $x^2 = -2py$, получим $p = \frac{1}{4}$. Следовательно, уравнение параболы имеет вид $x^2 = -\frac{1}{2}y$ или $y = -2x^2$. Фокус параболы $F\left(0; -\frac{1}{8}\right)$, а директриса $y = \frac{1}{8}$.

Упражнения

1. Найти уравнение параболы с фокусом $F(0; -3)$, проходящей через начало координат и симметричной оси Oy.

Отв. $x^2 = -12y$.

2. Найти фокус F и уравнение директрисы параболы, уравнение которой $y^2 = 24x$.

Отв. $F(6; 0)$, $x + 6 = 0$.

3. Найти координаты вершины, фокуса, уравнения оси и директрисы параболы $4x^2 + 4x + 3y - 2 = 0$.

Отв. $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$; $\left(-\frac{1}{2}; \frac{13}{16}\right)$; $2x + 1 = 0$; $16y - 19 = 0$.

4. Найти уравнение параболы, вершина которой лежит в точке (5; —2), а директрисой является прямая $y+4=0$.

Отв. $x^2-10x-8y+9=0$.

5. Найти уравнение параболы с фокусом F (7; 2) и директрисой $x-5=0$.

Отв. $x=\frac{1}{4}y^2-y+7$.

6. Вершина параболы находится в точке A (6; —3), уравнение ее директрисы $3x-5y+1=0$. Найти фокус F параболы.

Отв. F (9; —8).

ГЛАВА IV

МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

Положение любой точки в пространстве можно определить с помощью чисел, если введена система прямоугольных координат, состоящая из трех взаимно перпендикулярных осей, которые пересекаются в одной точке и занумерованны в определенном порядке. Точка пересечения осей называется *началом координат* и обозначается буквой O, а сами оси — *координатными осями*. Первую из координатных осей называют *осью абсцисс* и обозначают Ox; вторую — *осью ординат* (Oy), третью — *осью аппликат* (Oz). Условимся направление осей координат выбирать так, чтобы наблюдатель, для которого ось Oz проходит от ног к голове, мог видеть вращение первой из осей (Ox) ко второй (Oy) под углом 90° против часовой стрелки (рис. 4.1). Такую систему координат называют *правой*.

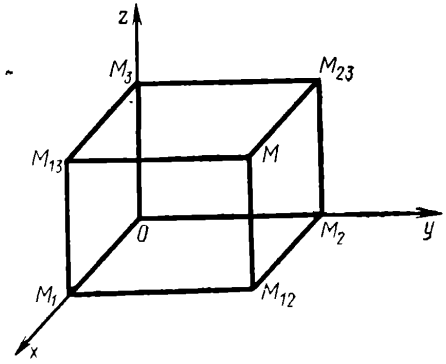

Рис. 4.1

Пусть M — произвольная точка пространства. Спроектируем ее на оси координат, т. е. проведем через точку плоскости, перпендикулярные осям Ox, Oy и Oz. Точки пересечения этих плоскостей с осями координат обозначим соответственно через M_1, M_2, M_3. Измерим величины отрезков $\overline{OM_1}$, $\overline{OM_2}$ и $\overline{OM_3}$ на осях координат.

Числа $x = OM_1$, $y = OM_2$ и $z = OM_3$ называются *координатами точки* M в заданной системе прямоугольных координат. Число x называется *абсциссой точки* M, число y — *ординатой*, число z — *аппликатой*. Символически координаты точки записываются в круглых скобках рядом с буквой, которой обозначена сама точка: $M(x; y; z)$.

Проекции точки M на оси координат можно также построить, проводя через точку M перпендикуляр к плоскости xOy и опуская из его основания M_{12} перпендикуляры на оси Ox и Oy (получаются соответственно точки M_1 и M_2). Аналогично, если обозначить через M_{13} и M_{23} основания перпендикуляров, проведенных через точку M к координатным плоскостям xOz и yOz, то, проектируя точки M_{13} и M_{23} на оси координат, можно найти точки M_1, M_2 и M_3.

Точки M_1, M_2, M_3, M_{12}, M_{13}, M_{23} и O являются вершинами прямоугольного параллелепипеда, стороны которого, взятые с соответствующими знаками, являются координатами точки M (см. рис. 4.1).

Если задана система прямоугольных координат в пространстве, то каждой точке в этой системе соответствует одна вполне определенная тройка чисел x, y, z. Верно обратное: каковы бы ни были три действительных числа x, y, z, в пространстве всегда найдется одна вполне определенная точка с координатами x, y, z. Для построения точки по ее координатам нужно отложить на оси абсцисс от начала координат отрезок $\overline{OM_1}$, величина которого равна x, по оси ординат — отрезок $\overline{OM_2}$, величина которого равна y, а по оси аппликат — отрезок $\overline{OM_3}$, величина которого равна z. Затем через точки M_1, M_2 и M_3 проводят плоскости, перпендикулярные соответственно к осям Ox, Oy и Oz. Искомая точка M является точкой пересечения этих трех плоскостей.

В прямоугольной системе начало координат O имеет все три координаты, равные нулю: $O(0;\ 0;\ 0)$.

Плоскость yOz разделяет все пространство на два полупространства: ближнее полупространство, расположенное в положительном направлении оси Ox, и дальнее, расположенное в отрицательном направлении Ox. Все точки, лежащие на плоскости yOz, имеют абсциссу, равную нулю ($x=0$). Точки полупространства, расположенные ближе плоскости yOz, имеют положительную абсциссу ($x>0$), а точки полупространства, расположенные дальше плоскости yOz, имеют отрицательную абсциссу ($x<0$).

Аналогично, плоскость yOz разделяет все пространство на два полупространства: правое, расположенное в положительном направлении оси Oy, и левое, расположенное в отрицательном направлении оси Oy. Все точки, лежащие на плоскости xOz, имеют ординату, равную нулю ($y=0$). Точки правого полупространства имеют положительную ординату ($y>0$), а точки левого полупространства — отрицательную ординату ($y<0$).

Наконец, плоскость xOy разделяет все пространство на два полупространства: верхнее, расположенное в положительном направлении оси Oz, и нижнее, расположенное в отрицательном направлении оси Oz. Все точки, лежащие на плоскости xOy, имеют аппликату, равную нулю ($z=0$). Точки верхнего полупространства имеют положительную аппликату ($z>0$), а точки нижнего полупространства — отрицательную аппликату ($z<0$). Таким образом, для всех точек оси Ox выполняются равенства $y=0$, $z=0$; для всех точек оси Oy — равенства $x=0$, $z=0$; для точек оси Oz — равенства $x=0$, $y=0$.

Три плоскости xOy, xOz и yOz одновременно разделяют пространство на восемь частей, называемых *координатными октантами*. *Первым октантом* называют ту часть пространства, которая одновременно лежит в ближнем, правом и верхнем полупространствах; *вторым* — часть пространства, одновременно лежащую в дальнем,

правом и верхнем полупространствах; *третьим* — часть пространства, одновременно лежащую в дальнем, левом и верхнем полупространствах; *четвертым* — часть пространства, одновременно лежащую в ближнем, левом и верхнем полупространствах. *Пятый*, *шестой*, *седьмой* и *восьмой* октанты расположены в нижнем полупространстве соответственно под первым, вторым, третьим и четвертым октантами.

Пусть $M(x; y; z)$ — произвольная точка пространства. Тогда:
если $x>0$, $y>0$, $z>0$, то точка M лежит в первом октанте;
если $x<0$, $y>0$, $z>0$, то точка M лежит во втором октанте;
если $x<0$, $y<0$, $z>0$, то точка M лежит в третьем октанте;
если $x>0$, $y<0$, $z>0$, то точка M лежит в четвертом октанте;
если $x>0$, $y>0$, $z<0$, то точка M лежит в пятом октанте;
если $x<0$, $y>0$, $z<0$, то точка M лежит в шестом октанте;
если $x<0$, $y<0$, $z<0$, то точка M лежит в седьмом октанте;
если $x>0$, $y<0$, $z<0$, то точка M лежит в восьмом октанте.

Пример. В каких октантах расположены точки, координаты которых удовлетворяют одному из условий: 1) $x-y=0$; 2) $y+z=0$?

Решение. 1. Очевидно, что условию $x=y$ удовлетворяют точки, имеющие одинаковые знаки у абсцисс и ординат при фиксированном знаке у аппликаты. Таким образом, эти точки расположены в первом, третьем, пятом и седьмом октантах.

2. Очевидно, что условию $y=-z$ удовлетворяют точки, имеющие разные знаки у ординат и аппликат при фиксированном знаке у абсциссы. Таким образом, эти точки расположены в третьем, четвертом, пятом и шестом октантах.

§ 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными x и y:

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y&=c_1,\\ a_2x+b_2y&=c_2. \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Умножим первое из уравнений на b_2, а второе — на $(-b_1)$ и сложим оба уравнения:

$$(a_1b_2-a_2b_1)\,x=c_1b_2-c_2b_1. \tag{4.2}$$

Далее умножим первое из уравнений на $(-a_2)$, а второе — на a_1 и сложим оба уравнения:

$$(a_1b_2-a_2b_1)\,y=a_1c_2-a_2c_1. \tag{4.3}$$

Если $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, то из равенств (4.2) и (4.3) получим искомое решение системы:

$$x=\frac{a_1b_1-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1};\quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \tag{4.4}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что найденные значения переменных x и y удовлетворяют системе (4.1). Нетрудно

выяснить, по какому закону из коэффициентов уравнений системы (4.1) составлены знаменатели выражений (4.4). Для этого коэффициенты этой системы выпишем в виде таблицы

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}$$

и составим разность произведений. Первое из произведений надо составлять по главной диагонали, проходящей от первого элемента первой строки ко второму элементу второй строки; второе — по побочной диагонали, идущей от первого элемента второй строки ко второму элементу первой строки. Определителем второго порядка, составленным из квадратной таблицы

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}$$

четырех чисел, называется разность $a_1b_2 - a_2b_1$. Этот определитель записывается в виде

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Тогда согласно определению определителя второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \tag{4.5}$$

Коэффициенты a_1, a_2, b_1, b_2 называются *элементами определителя*. Произведения a_1b_2 и a_2b_1 называются *членами определителя*. В соответствии с формулой (4.5) имеем

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1, \tag{4.6}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1. \tag{4.7}$$

Определитель (4.5) называется *определителем* системы. Решение системы можно записать в виде

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{4.8}$$

Вводим следующие обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

тогда формулы (4.4) можно записать в виде

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad (\text{при } \Delta \neq 0). \tag{4.9}$$

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+2y&=-3,\\ 3x-y&=5. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Для решения системы воспользуемся формулами (4.8):

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 5 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}}=\frac{-7}{-7}=1,\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}}=\frac{14}{-7}=-2.$$

Упражнения

Вычислить следующие определители:

1. $\begin{vmatrix}5 & 2\\ 7 & 3\end{vmatrix}$.

Ответ. $\Delta=1$

2. $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}$.

Ответ. $\Delta=-2$.

3. $\begin{vmatrix}3 & 2\\ 8 & 5\end{vmatrix}$.

Ответ. $\Delta=-1$.

4. $\begin{vmatrix}6 & 9\\ 8 & 12\end{vmatrix}$.

Ответ. $\Delta=0$.

5. $\begin{vmatrix}a+b & a-b\\ a-b & a+b\end{vmatrix}$.

Ответ. $\Delta=4ab$.

Пользуясь определителями, решить системы уравнений:

6. $\left.\begin{aligned} 2x+5y&=1,\\ 3x+7y&=2. \end{aligned}\right\}$

Ответ. $x=3$; $y=-1$.

7. $\left.\begin{aligned} 2x-3y&=4,\\ 4x-5y&=10. \end{aligned}\right\}$

Ответ. $x=5$; $y=2$.

8. $\left.\begin{aligned} 5x-7y&=1,\\ x-2y&=0. \end{aligned}\right\}$

Ответ. $x=\frac{2}{3}$; $y=\frac{1}{3}$.

9. $\left.\begin{aligned} 4x+7y+13&=0,\\ 5x+8y+14&=0. \end{aligned}\right\}$

Ответ. $x=2$; $y=-3$.

§ 3. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассмотрим систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=d_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z&=d_2,\\ a_3x+b_3y+c_3z&=d_3. \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

Решая систему, получим

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta};\quad y=\frac{\Delta_2}{\Delta};\quad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}\quad(\Delta\neq 0). \tag{4.11}$$

Здесь:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-b_1a_2c_3-a_1c_2b_3; \tag{4.12}$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=d_1b_2c_3+b_1c_2d_3+c_1d_2b_3-c_1b_2d_3-b_1d_2c_3-d_1c_2b_3; \quad (4.13)$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1d_2c_3+d_1c_2a_3+c_1a_2d_3-c_1d_2a_3-d_1a_2c_3-a_1c_2d_3; \quad (4.14)$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}=a_1b_2d_3+b_1d_2a_3+d_1a_2b_3-d_1b_2a_3-b_1a_2d_3-a_1d_2b_3. \quad (4.15)$$

Определителем третьего порядка, составленным из квадратной таблицы девяти чисел

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3, \end{matrix} \quad (4.16)$$

называется число

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-b_1a_2c_3-a_1c_2b_3.$$

В отличие от определителей (4.13), (4.14) и (4.15) определитель (4.12) называется *определителем системы.* Числа, составляющие таблицу (4.16), называются *элементами определителя третьего порядка.*

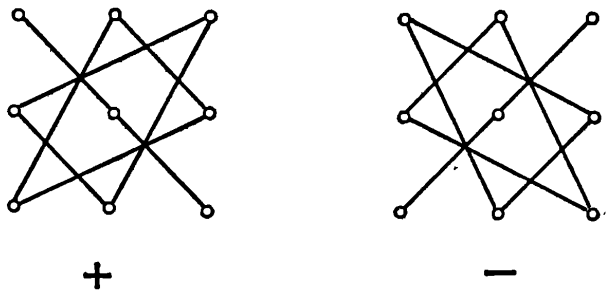

Рис. 4.2

Диагональ, идущая в этой таблице сверху вниз направо, называется *главной диагональю*, а диагональ, идущая сверху вниз налево, называется *побочной диагональю.* Определитель третьего порядка, составленный из таблицы (4.16), представляет собой алгебраическую сумму шести произведений, причем три произведения берутся со знаком «+» и три — со знаком «—». Со знаком «+» берется произведение элементов, стоящих на главной диагонали, а также произведения элементов, стоящих на параллели к главной диагонали, с добавлением третьего множителя из противоположного угла таблицы. Со знаком «—» берется произведение элементов, стоящих на побочной диагонали, а также произведения элементов,

стоящих на параллели к побочной диагонали, с добавлением третьего множителя из противоположного угла таблицы.

В каждое из произведений входят элементы, взятые только по одному из каждой строки и каждого столбца таблицы (4.16).

Произведения со знаком «+» или «—» можно изобразить с помощью схемы (рис. 4.2).

Пример. Вычислить определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. По формуле (4.12) получим

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot 2\cdot 2+3\cdot 2\cdot 1+(-3)\cdot 2\cdot 1-3\cdot 2\cdot(-3)-1\cdot 1\cdot 1-$$
$$-2\cdot 2\cdot 2=13.$$

Упражнения

Вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

Отв. $\Delta=40$.

2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

Отв. $\Delta=-3$.

3. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$.

Отв. $\Delta=100$.

4. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$.

Отв. $\Delta=-5$.

5. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$.

Отв. $\Delta=0$.

6. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

Отв. $\Delta=3abc-a^3-b^3-c^3$.

7. $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$.

Отв. $\Delta=2x^3-(a+b+c)\,x^2+abc$.

§ 4. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ n-го ПОРЯДКА И ИХ СВОЙСТВА

Известно, что n элементов, перенумерованных с помощью n первых натуральных чисел, можно упорядочить различными способами. Всякое расположение в некотором определенном порядке чисел (элементов) $1, 2, \ldots, n$ называется *перестановкой* из n чисел. Число различных перестановок из n элементов равно $n!$ Если в перестановке поменять местами какие-либо два элемента, оставив остальные элементы на месте, то получим новую перестановку. Такое преобразование перестановки называется *транспозицией*.

Будем считать расположение чисел (элементов) в перестановке в возрастающем порядке нормальным. Назовем *инверсией* в перестановке тот факт, когда два ее элемента следуют не в том порядке, в каком они стоят в основной перестановке, т. е., иначе говоря, когда большее число стоит перед меньшим.

Так, в перестановке 3214 инверсии образуют следующие пары чисел: 3 и 2, 3 и 1, 2 и 1. В то же время пары чисел 3 и 4, 2 и 4, 1 и 4 инверсий не образуют.

Перестановка называется *четной*, если она содержит четное число инверсий, и *нечетной*, если нечетное.

Так, перестановка 3214 является нечетной, а перестановка 2431 — четной. Можно доказать, что:

1) всякая транспозиция переводит четную перестановку в нечетную, а нечетную — в четную;

2) от одной перестановки можно перейти к любой другой с помощью ряда последовательных транспозиций;

3) число всех четных перестановок из n элементов равно числу всех нечетных перестановок из этих же n элементов.

Доказательства этих предложений здесь не приводятся.

Определителем n-го порядка, составленным из n^2 чисел таблицы

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}, \end{matrix} \tag{4.17}$$

называется алгебраическая сумма $n!$ членов. Членом является любое произведение n чисел таблицы (4.17), взятых по одному из каждой строки или каждого столбца; знак члена равен $(-1)^I$, где I — число инверсий в перестановке вторых индексов, если первые индексы расположены в порядке возрастания.

Из приведенного определения следует, что если $a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$ есть член определителя n-го порядка, то I означает число инверсий в перестановке $p_1\ p_2\ \dots\ p_n$. Числа, входящие в таблицу (4.17), состоящую из n строк и n столбцов, для которой определен определитель n-го порядка, называются *элементами определителя*.

Определитель n-го порядка, составленный из n^2 чисел таблицы (4.17), обозначается так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что определения определителей второго и третьего порядков выводятся из определения определителя n-го порядка при $n=2$ или $n=3$.

Пример 1. Пользуясь определением определителя n-го порядка, найти знаки членов определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Решение. Для каждого члена определителя третьего порядка, в котором первые индексы у элементов идут в порядке возрастания, запишем перестановку вторых номеров, найдем число инверсий в этой перестановке и знак указанного члена. Результаты вычислений представлены в табл. 1.

Таблица 1

Член определителя	Перестановка вторых индексов	Число инверсий	Знак члена
$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$	123	0	+
$a_{12}\ a_{23}\ a_{31}$	231	2	+
$a_{13}\ a_{21}\ a_{32}$	312	2	+
$a_{13}\ a_{22}\ a_{31}$	321	3	—
$a_{12}\ a_{21}\ a_{33}$	213	1	—
$a_{11}\ a_{23}\ a_{32}$	132	1	—

Таким образом,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Итак, знаки членов определителя третьего порядка, найденные согласно определению определителя n-го порядка, совпадают со знаками, которые имеют эти члены в определении определителя третьего порядка. Использование свойств определителей n-го порядка значительно облегчает их вычисление.

Свойство 1. Если все элементы строки (столбца) определителя n-го порядка равны нулю, то определитель равен нулю.

Доказательство. Пусть в определителе n-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

все элементы i-й строки ($i = 1, 2, \dots, n$) равны нулю: $a_{i1} = a_{i2} = \dots = a_{in} = 0$. Согласно определению определителя n-го порядка каждый его член является произведением n чисел соответствующей таблицы, взятых по одному и только по одному из каждой строки

или из каждого столбца. Отсюда следует, что любой член определителя n-го порядка содержит множителем некоторый элемент i-й строки и равен нулю.

Так как каждый член определителя n-го порядка равен нулю, то и сам определитель также равен нулю.

Свойство 2. Определитель n-порядка не изменится, если его строки заменить столбцами с теми же индексами.

Доказательство. Пусть $a_{1p_1}a_{2p_2}\ldots a_{np_n}$ — член определителя n-го порядка

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Переставив в этом члене сомножители так, чтобы вторые номера шли в порядке возрастания, получим член $a_{q_11}a_{q_22}\ldots a_{q_nn}$ определителя

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

так как второй индекс j элемента a_{ij} ($i, j=1, 2, \ldots, n$) в определителе Δ_1 является номером строки. Отсюда

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\ldots a_{np_n}=a_{q_11}a_{q_22}\ldots a_{q_nn}.$$

Таким образом, каждый член определителя Δ является членом определителя Δ_1. Очевидно, что верно и обратное: каждый член определителя Δ_1 является членом определителя Δ.

Докажем теперь, что знаки, с которыми входят равные члены в определители Δ и Δ_1, совпадают, т. е. что перестановки

$$p_1p_2\ldots p_n, \tag{4.18}$$

$$q_1q_2\ldots q_n \tag{4.19}$$

имеют одинаковую четность. Возьмем два числа p_k и p_l в перестановке (4.18), причем p_k стоит впереди p_l, т. е. $k>l$. Член $a_{q_11}a_{q_22}\ldots a_{q_nn}$ определителя Δ_1 мы получили из члена $a_{1p_1}a_{2p_2}\ldots a_{np_n}$, переставив сомножители так, чтобы вторые индексы шли в порядке возрастания. При перестановке сомножителей члена $a_{1p_1}a_{2p_2}\ldots a_{np_n}$ пары ip_i ($i=1, 2, \ldots, n$) не нарушаются. Соответствие между цифрами i, p_i запишем в виде

$$\begin{matrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n. \end{matrix}$$

Пары ip_i переставим так, чтобы числа нижней строки расположились в порядке возрастания. Тогда

$$\begin{matrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \\ 1 & 2 & \dots & n. \end{matrix}$$

Отсюда следует, что если $p_k < p_l$, то в перестановке (4.18) k будет стоять впереди l, и пара $p_k p_l$ в этой перестановке, а также пара k, l в перестановке (4.19) не образуют инверсию; если $p_k > p_l$, то в перестановке (4.18) l будет стоять впереди k и пара $p_k p_l$ в этой перестановке, а также пара k, l в перестановке (4.19) образуют инверсию.

Таким образом, если числа p_k, p_l не образуют инверсию в перестановке (4.18), то числа k, l также не образуют инверсию в перестановке (4.19), а если числа p_k, p_l образуют инверсию в перестановке (4.18), то числа k, l также образуют инверсию в перестановке (4.19). Следовательно, перестановки (4.18) и (4.19) имеют одно и то же число инверсий.

Свойство 2 свидетельствует о полном равноправии строк и столбцов определителя. Следовательно, если некоторое утверждение справедливо относительно столбцов определителя, то аналогичное утверждение справедливо и для его строк.

Свойство 3. Если поменять местами две строки (столбца), то определитель n-го порядка изменит знак на противоположный, а по абсолютной величине не изменится.

Доказательство. Пусть дан определитель n-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Меняя местами в определителе k-ю и l-ю строки, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Введем иное обозначение определителя:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{l1} & b_{l2} & \dots & b_{ln} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Здесь: $b_{ij} = a_{ij}$, если $i \neq k$, l; $b_{kj} = a_{lj}$, $b_{lj} = a_{kj}$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$. Докажем, что $\Delta_1 = -\Delta$. Преобразуем общий член определителя Δ_1 следующим образом:

$$b_{1p_1} b_{2p_2} \dots b_{k-1,\, p_{k-1}} b_{kp_k} b_{k+1,\, p_{k+1}} \dots b_{l-1,\, p_{l-1}} b_{lp_l} b_{l+1,\, p_{l+1}} \dots b_{np_n} =$$
$$= a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{k-1,\, p_{k-1}} a_{lp_l} a_{k+1,\, p_{k+1}} \dots a_{l-1,\, p_{l-1}} a_{kp_k} a_{l+1,\, p_{l+1}} \dots a_{np_n} =$$
$$= a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{k-1,\, p_{k-1}} a_{kp_l} a_{k+1,\, p_{k+1}} \dots a_{l-1,\, p_{l-1}} a_{lp_k} \dots \times$$
$$\times a_{l+1,\, p_{l+1}} \dots a_{np_n}.$$

Знак данного члена в определителе Δ_1 равен $(-1)^{I_1}$, где I_1 — число инверсий в перестановке

$$p_1 p_2 \dots p_{k-1} p_l p_{k+1} \dots p_{l-1} p_k p_{l+1} \dots p_n,$$

а знак этого же члена в определителе Δ равен $(-1)^I$, где I — число инверсий в перестановке

$$p_1 p_2 \dots p_{k-1} p_k p_{k+1} \dots p_{l-1} p_l p_{l+1} \dots p_n.$$

Эти перестановки имеют различную четность, так как первая получается из второй путем транспозиции чисел p_k, p_l. Таким образом, равные члены определителей Δ и Δ_1 входят в эти же определители с противоположными знаками. Отсюда и следует справедливость свойства 3.

Следствие. Определитель n-го порядка, у которого две строки (столбца) одинаковы, равен нулю.

Доказательство. Пусть данный определитель n-го порядка имеет два одинаковых столбца. Поменяв местами одинаковые столбцы, получим тот же самый определитель: $\Delta_1 = \Delta$. Но, согласно доказанному свойству 3, $\Delta_1 = -\Delta$. Тогда $\Delta = -\Delta$; $2\Delta = 0$; $\Delta = 0$, что и требовалось доказать.

Свойство 4. Если все элементы строки (столбца) определителя n-го порядка умножить на одно и то же число, то и определитель умножится на это число.

Доказательство. Рассмотрим определитель n-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Элементы i-й строки определителя Δ умножим на число λ, тогда получим новый определитель

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Запишем член определителя Δ_1, соответствующий члену

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\dots a_{i-1,\,p_{i-1}}a_{ip_i}a_{i+1,\,p_{i+1}}\dots a_{np_n}$$

определителя Δ:

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\dots a_{i-1,\,p_{i-1}}\lambda a_{ip_i}a_{i+1,\,p_{i+1}}\dots a_{np_n} =$$
$$= \lambda a_{1p_1}a_{2p_2}\dots a_{i-1,\,p_{i-1}}a_{ip_i}a_{i+1,\,p_{i+1}}\dots a_{np_n}.$$

Очевидно, что каждый член определителя Δ_1 имеет множителем число λ. Если λ вынести за скобки, то в скобках остается определитель Δ. Таким образом, $\Delta_1 = \lambda\Delta$.

Следствие 1. Если элементы какой-либо строки (столбца) определителя n-го порядка имеют общий множитель, то этот множитель можно вынести за знак определителя.

Следствие 2. Определитель n-го порядка, у которого элементы двух строк (столбцов) соответственно пропорциональны, равен нулю.

Доказательство. Пусть, например, соответственно пропорциональны элементы первого и второго столбцов определителя n-го порядка, т. е.

$$\frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{21}} = \frac{a_{32}}{a_{31}} = \dots = \frac{a_{n2}}{a_{n1}} = \lambda.$$

Тогда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{12} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \lambda a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

равен нулю, так как содержит два одинаковых столбца.

Свойство 5. Если каждый элемент какой-либо строки (столбца) определителя есть сумма двух слагаемых, например

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1,\,k-1}\, a'_{1k} + a''_{1k}\, a_{1,\,k+1} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2,\,k-1}\, a'_{2k} + a''_{2k}\, a_{2,\,k+1} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} a_{n2} \dots a_{n,\,k-1}\, a'_{nk} + a''_{nk}\, a_{n,\,k+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix},$$

то определитель Δ можно представить в виде суммы двух определителей $\Delta_1 + \Delta_2$, где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1,\,k-1}\, a'_{1k}\, a_{1,\,k+1} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2,\,k-1}\, a'_{2k}\, a_{2,\,k+1} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} a_{n2} \dots a_{n,\,k-1}\, a'_{nk}\, a_{n,\,k+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \dots a_{1,\,k-1}\, a''_{1k}\, a_{1,\,k+1} \dots a_{1n} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2,\,k-1}\, a''_{2k}\, a_{2,\,k+1} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} a_{n2} \dots a_{n,\,k-1}\, a''_{nk}\, a_{n,\,k+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Каждый член определителя Δ можно представить в виде суммы двух слагаемых следующим образом:

$$a_{q_1 1} a_{q_2 2} \dots a_{q_{k-1} k-1} a_{q_k k} a_{q_{k+1} k+1} \dots a_{q_n n} =$$
$$= a_{q_1 1} a_{q_2 2} \dots a_{q_{k-1} k-1} a'_{q_k k} a_{q_{k+1} k+1} \dots a_{q_n n} +$$
$$+ a_{q_1 1} a_{q_2 2} \dots a_{q_{k-1} k-1} a''_{q_k k} a_{q_{k+1} k+1} \dots a_{q_n n},$$

откуда вытекает справедливость свойства 5.

Следствие. Определитель n-го порядка не изменится, если ко всем элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Доказательство. Проведем доказательство на примере определителя четвертого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Составим определитель, который получается из данного путем прибавления к элементам первого столбца соответствующих элементов третьего столбца, умноженных на одно и то же число λ:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{13} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} + \lambda a_{23} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} + \lambda a_{33} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} + \lambda a_{43} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Согласно свойству 5

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_{13} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \lambda a_{23} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \lambda a_{33} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \lambda a_{43} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Второй из определителей, входящих в сумму, равен нулю как определитель, в котором элементы первого столбца пропорциональны соответствующим элементам третьего столбца, т. е. в силу следствия 2 свойства 4.

Таким образом, $\Delta_1 = \Delta$, что и требовалось доказать.

Пример 1. Доказать справедливость равенства

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda x+\mu x^2 & x & x^2 \\ 1+\lambda y+\mu y^2 & y & y^2 \\ 1+\lambda z+\mu z^2 & z & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Воспользуемся свойством 5 для определителя, стоящего в левой части доказываемого равенства. Его первый столбец является суммой трех слагаемых. Поэтому сам определитель можно представить в виде суммы трех определителей:

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda x+\mu x^2 & x & x^2 \\ 1+\lambda y+\mu y^2 & y & y^2 \\ 1+\lambda z+\mu z^2 & z & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} x & x & x^2 \\ y & y & y^2 \\ z & z & z^2 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} x^2 & x & x^2 \\ y^2 & y & y^2 \\ z^2 & z & z^2 \end{vmatrix}.$$

Два последних определителя равны нулю, так как содержат по два одинаковых столбца (следствие свойства 3). Поэтому

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda x+\mu x^2 & x & x^2 \\ 1+\lambda y+\mu y^2 & y & y^2 \\ 1+\lambda z+\mu z^2 & z & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix},$$

что требовалось доказать.

§ 5. РАЗЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ n-го ПОРЯДКА ПО ЭЛЕМЕНТАМ СТРОКИ ИЛИ СТОЛБЦА

Определитель n-го порядка выражается через определители $(n-1)$-го порядка. Введем понятия минора и алгебраического дополнения.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется определитель $(n-1)$-го порядка, который получается из определителя Δ вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, т. е. строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}. Согласно приведенному определению

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,\,j-1} & a_{1,\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,\,j-1} & a_{2,\,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,\,1} & a_{i-1,\,2} & \dots & a_{i-1,\,j-1} & a_{i-1,\,j+1} & \dots & a_{i-1,\,n} \\ a_{i+1,\,1} & a_{i+1,\,2} & \dots & a_{i+1,\,j-1} & a_{i+1,\,j+1} & \dots & a_{i+1,\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,\,j-1} & a_{n,\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (4.20)$$

Пример 1. Найти минор элемента a_{12} в определителе третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Решение. Вычеркнув в этом определителе первую строку и второй столбец, на пересечении которых стоит элемент a_{12}, получим

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} в определителе n-го порядка называется минор M_{ij}, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Обозначим алгебраическое дополнение элемента a_{ij} через A_{ij}. По определению имеем

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}. \quad (4.20')$$

Пример 2. Найти алгебраическое дополнение элемента a_{23} в определителе третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Решение. По формуле (4.19) минор элемента a_{23}

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Затем по формуле (4.20′) находим искомое алгебраическое дополнение элемента a_{23}:

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что в алгебраическое дополнение A_{ij} не входит ни один из элементов i-й строки или j-го столбца, т. е. алгебраическое

дополнение A_{ij} элемента a_{ij} не зависит от элементов i-й строки и j-го столбца определителя.

Алгебраическое дополнение можно определить еще и другим способом. Если объединить в группу все члены определителя n-го порядка, содержащие элемент a_{ij}, и вынести a_{ij} за скобки, то в скобках останется алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij}. Для примера возьмем определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{4.21}$$

Пусть роль элемента a_{ij} играет, например, элемент a_{23}. Так как элемент a_{23} входит лишь во второе и последнее слагаемое суммы (4.21), то его алгебраическое дополнение

$$A_{23} = a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32},$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Теорема 1. *Определитель n-го порядка равен сумме произведений всех элементов любого из его столбцов (строк) на их алгебраические дополнения.*

Доказательство. Рассмотрим определитель n-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Выделим j-й столбец в определителе Δ и рассмотрим элемент a_{1j} первой строки выделенного столбца. По определению определителя n-го порядка он представляет собой алгебраическую сумму $n!$ членов. Соберем в этой сумме все члены, содержащие элемент a_{1j}, и обозначим эту сумму через S_1. Аналогично, соберем все члены, содержащие элемент a_{2j}, и обозначим их сумму через S_2 и т. д. Наконец, через S_n обозначим сумму тех членов, которые содержат элемент a_{nj}. Известно, что в каждый член определителя Δ входит один и только один элемент из j-го столбца. Поэтому каждый член определителя Δ входит в одну и только в одну из сумм $S_1, S_2, \dots, S_n$. Следовательно, определитель Δ можно записать в виде

$$\Delta = S_1 + S_2 + \dots + S_n. \tag{4.22}$$

Во всех членах суммы S_1 есть общий множитель — элемент a_{1j}. Вынесем его за скобки. Выражение, оставшееся в скобках, является алгебраическим дополнением элемента a_{1j} и обозначается через A_{1j}. Значит, $S_1 = a_{1j}A_{1j}$. Точно так же $S_2 = a_{2j}A_{2j}$ и т. д. Наконец, $S_n = a_{nj}A_{nj}$. В силу сказанного, равенство (4.22) можно переписать в виде

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}, \tag{4.23}$$

что и требовалось доказать.

В силу равноправности строк и столбцов определителя n-го порядка определитель Δ можно разложить и по элементам любой его i-й строки:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + A_{in}a_{in}. \qquad (4.24)$$

Таким образом, определитель n-го порядка выражается через определитель $(n-1)$-го порядка, которым является минор M_{ij}, связанный с алгебраическим дополнением соотношением (4.20).

Теорема 2. *Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя n-го порядка на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.*

Доказательство. Докажем, что

$$a_{1k}A_{1l} + a_{2k}A_{2l} + \ldots + a_{nk}A_{nl} = 0 \quad (k \neq l).$$

Запишем разложение определителя n-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

по элементам l-го столбца:

$$\Delta = a_{1l}A_{1l} + a_{2l}A_{2l} + \ldots + a_{nl}A_{nl}.$$

Алгебраические дополнения A_{1l}, A_{2l}, ..., A_{nl} не зависят от элементов l-го столбца, поэтому последнее равенство останется в силе, если вместо элементов l-го столбца взять соответствующие элементы k-го столбца. Тогда определитель Δ будет иметь два одинаковых столбца, а именно l-й и k-й. Согласно следствию свойства 3 такой определитель равен нулю, т. е.

$$0 = a_{1k}A_{1l} + a_{2k}A_{2l} + \ldots + a_{nk}A_{nl}.$$

Теорема доказана.

Пример 2. Вычислить определитель четвертого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Прибавим к первому столбцу сумму остальных столбцов. От этого определитель не меняется (следствие свойства 5). В результате получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Из первого столбца вынесем за знак определителя общий множитель 10 (следствие 1 свойства 4):

$$\Delta = 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Вычтем первую строку из второй:

$$\Delta = 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

В последнем определителе вычтем первую строку из третьей, а в полученном таким образом определителе вычтем первую строку из четвертой. Фактически вычитаем первую строку из третьей и из четвертой. Окончательно имеем

$$\Delta = 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по элементам первого столбца:

$$\Delta = 10 \cdot 1\,(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Вынесем за знак определителя из второй строки множитель 2, а из третьей — множитель (—1):

$$\Delta = -20\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Вычтем далее первую строку из второй и третьей:

$$\Delta = -20\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по элементам первого столбца, тогда

$$\Delta = -20 \cdot (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 160.$$

Заметим, что если в определителе n-го порядка $a_{ij} \neq 0$, то его всегда можно преобразовать к виду, когда все элементы i-й строки или все элементы j-го столбца, за исключением a_{ij}, равны нулю. Наличие нулей в строках или столбцах определителя n-го порядка значительно облегчает вычисление его путем разложения по элементам соответствующей строки или столбца.

Упражнения

Вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Отв. $\Delta = -8$.

2. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 2 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Отв. $\Delta = -9$.

3. $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$.

Отв. $\Delta = 18$.

4. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

Отв. $\Delta = 18$.

§ 6. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ n ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С n НЕИЗВЕСТНЫМИ. ПРАВИЛО КРАМЕРА

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}\right\} \qquad (4.25)$$

Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

составленный из коэффициентов при неизвестных этой системы, называется *определителем системы*. Совокупность значений неизвестных $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ..., $x_n = \alpha_n$, удовлетворяющих всем уравнениям системы (4.25), называется *решением системы*.

Теорема 1. *Если определитель системы* (4.25) *отличен от нуля, то система имеет единственное решение: значение любого неизвестного равно дроби, знаменателем которой является определитель системы, а числителем — определитель, который получается из определителя системы заменой столбца, соответствующего определяемому неизвестному, столбцом из свободных членов*, т. е.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,\,j-1} & b_1 & a_{1,\,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,\,j-1} & b_2 & a_{2,\,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,\,j-1} & b_n & a_{n,\,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Доказательство. Пусть A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в определителе Δ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$. Умножая обе части первого уравнения на A_{1j}, второго — на A_{2j}, ..., n-го — на A_{nj} и складывая полученные уравнения, имеем

$$(a_{11}A_{1j}+a_{21}A_{2j}+\ldots+a_{n1}A_{nj})\,x_1+(a_{12}A_{1j}+a_{22}A_{2j}+\ldots+a_{n2}A_{nj})\,x_2+\ldots$$
$$+(a_{1n}A_{1j}+a_{2n}A_{2j}+\ldots+a_{nn}A_{nj})\,x_n=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\ldots+b_nA_{nj}.$$

Отсюда согласно теореме 2 § 5 следует, что

$$(a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj})\,x_j=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\ldots+b_nA_{nj}. \qquad (4.26)$$

Так как

$$\Delta=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj},$$

то

$$\Delta_j=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\ldots+b_nA_{nj},$$

где определитель Δ_j получается из определителя Δ заменой j-го столбца столбцом из свободных членов системы (4.25). Уравнение (4.26) перепишем в виде $\Delta\cdot x_j=\Delta_j$.

Таким образом, из системы (4.25) получена система

$$\left.\begin{aligned}\Delta\cdot x_1&=\Delta_1,\\ \Delta\cdot x_2&=\Delta_2,\\ \Delta\cdot x_n&=\Delta_n.\end{aligned}\right\} \qquad (4.27)$$

Если определитель Δ системы (4.25) отличен от нуля, то, очевидно, система (4.27) имеет единственное решение:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Всякое решение системы (4.25) является решением системы (4.27). Действительно, пусть система (4.25) имеет решение

$$x_1=\alpha_1,\ x_2=\alpha_2,\ \ldots,\ x_n=\alpha_n.$$

Тогда имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\ldots+a_{1n}\alpha_n&=b_1,\\ a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\ldots+a_{2n}\alpha_n&=b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+\ldots+a_{nn}\alpha_n&=b_n.\end{aligned}$$

Умножим обе части первого из этих равенств на A_{ij}, второго — на A_{2j} и т. д. и сложим найденные равенства. В результате получим

$$\Delta\cdot\alpha_1=\Delta_1,\ \Delta\cdot\alpha_2=\Delta_2,\ \ldots,\ \Delta\cdot\alpha_n=\Delta_n.$$

Следовательно, доказано, что всякое решение системы (4.25) является решением системы (4.27). Докажем, что решение системы (4.27) является решением системы (4.25). Запишем решение системы (4.27):

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Покажем, что значения неизвестных, образующих решение системы (4.27), удовлетворяют, например, первому из уравнений системы (4.25). Подставляя в первое из уравнений системы (4.25) вместо неизвестных соответствующие им значения, получим

$$a_{11}\frac{\Delta_1}{\Delta}+a_{12}\frac{\Delta_2}{\Delta}+\ldots+a_{1n}\frac{\Delta_n}{\Delta}=b_1,$$

или

$$a_{11}\Delta_1+a_{12}\Delta_2+\ldots+a_{1n}\Delta_n=b_1\Delta.$$

Так как

$$\Delta_j=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\ldots+b_nA_{nj},$$

то

$$\begin{aligned}&a_{11}(b_1A_{11}+b_2A_{21}+\ldots+b_nA_{n1})+\\&+a_{12}(b_1A_{12}+b_2A_{22}+\ldots+b_nA_{n2})+\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+a_{1n}(b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\ldots+b_nA_{nn})=b_1\Delta.\end{aligned}$$

Раскроем в левой части этого равенства скобки и полученную сумму сгруппируем так, чтобы за скобки можно было вынести элементы b_1, b_2, ..., b_n. Тогда

$$\begin{aligned}&b_1(a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1n}A_{1n})+\\&+b_2(a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+\ldots+a_{1n}A_{2n})+\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+b_n(a_{11}A_{n1}+a_{12}A_{n2}+\ldots+a_{1n}A_{nn})=b_1\Delta.\end{aligned}$$

Из этого равенства, согласно теоремам 1, 2 § 5, следует, что

$$b_1\Delta=b_1\Delta.$$

Таким образом доказано, что решение системы (4.27) является решением системы (4.25).

Совокупность формул, с помощью которых получается решение системы n линейных уравнений с n неизвестными, называют *формулами* (или правилом) *Крамера*.

Пример 1. Решить систему

$$\left.\begin{aligned}2x_1-3x_2+x_3-2&=0,\\x_1+5x_2-4x_3+5&=0,\\4x_1+x_2-3x_3+4&=0.\end{aligned}\right\}$$

Решение. Вычислим определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&-3&1\\1&5&-4\\4&1&-3\end{vmatrix}=-30+1+48-20+8-9=-2.$$

Остальные определители таковы:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -10, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -4 \\ 4 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -12,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -5 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -20.$$

По правилу Крамера имеем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-10}{-2} = 5,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-12}{-2} = 6,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-20}{-2} = 10.$$

Однородной системой алгебраических уравнений называется система вида

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0, \end{array}\right\}$$

свободные члены которой равны нулю. Такая система всегда имеет нулевое решение:

$$x_1 = 0, \; x_2 = 0, \; \ldots, \; x_n = 0.$$

Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то нулевое решение является единственным.

Пусть теперь $\Delta = 0$. Тогда, учитывая, что $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0, \ldots, \Delta_n = 0$ (так как равны нулю свободные члены), приходим к выводу, что система имеет бесконечно много ненулевых решений.

Упражнения

Решить системы уравнений по правилу Крамера:

1. $\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10, \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{array}\right\}$

Отв. $x_1 = 3; \; x_2 = -2; \; x_3 = 2.$

2. $\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{array}\right\}$

Отв. $x_1 = x_2 = 1; \; x_3 = x_4 = -1.$

3. $\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{array}\right\}$

Отв. $x_1 = -2, \; x_2 = 0; \; x_3 = 1; \; x_4 = -1.$

4. $\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{array}\right\}$

Отв. $x_1 = 1; \; x_2 = x_3 = 2; \; x_4 = 0.$

§ 7. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА. ПРОЕКЦИИ ВЕКТОРА НА ОСЬ

Во многих областях науки и техники встречаются величины, которые вполне характеризуются одним числовым значением, например, время, площадь, масса, работа и др. Величины такого рода называются *скалярными* или *скалярами*.

Однако встречаются величины, которые характеризуются не только числовым значением, но и направлением. Примером таких величин могут служить: направленный отрезок, сила, скорость, ускорение и т. д. Величины такого рода называются *векторными*.

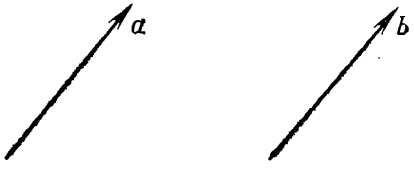

Рис. 4.3

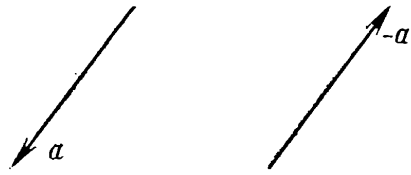

Рис. 4.4

Отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление в пространстве, называется *вектором*.

Таким образом, векторные величины геометрически изображаются векторами.

В силу определения вектор $\overline{AB}$ есть отрезок прямой, начало которого точка A, а конец — точка B. Обозначать вектор, как направленный отрезок, будем либо $\overline{AB}$, либо одной буквой жирного шрифта. На рисунках направление вектора указывается стрелкой. Длина вектора называется модулем вектора и обозначается $|AB|$ или $|\mathbf{a}|$.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором* или *ортом*. Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым вектором* и обозначается $\mathbf{0}$.

Векторы, параллельные одной и той же прямой, называются *коллинеарными*. Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, направлены в одну сторону и имеют одинаковую длину (рис. 4.3).

Из определения равенства двух векторов вытекает, что вектор $\mathbf{a}$ не изменится, если его перенести параллельно самому себе, выбрав за начало вектора любую точку пространства. Поэтому вектор $\mathbf{a}$ принято называть *свободным*. Если параллельные векторы имеют одинаковые длины, но направлены в разные стороны, то они называются *противоположными* (рис. 4.4). Вектор, противоположный вектору $\overline{AB}$, обозначают $\overline{BA}$, или вектор, противоположный вектору $\mathbf{a}$, обозначают $-\mathbf{a}$.

Пусть в пространстве дан некоторый вектор $\overline{AB}$ и произвольная ось v. Через точки A и B проведем плоскости, перпендикулярные оси v, и обозначим через A_1 и B_1 точки пересечения этих плоскостей с осью v (рис. 4.5).

Число A_1B_1, равное величине отрезка $\overline{A_1B_1}$ оси v, называется *проекцией вектора* $\overline{AB}$ на ось v и обозначается так:

$$\text{пр}_v \overline{AB} = A_1B_1.$$

Углом наклона вектора $\overline{AB}$ к оси v называется тот наименьший угол φ, на который нужно повернуть полуось A_1v до ее совмещения с вектором $\overline{A_1C}$, равным данному вектору $\overline{AB}$. Угол φ может

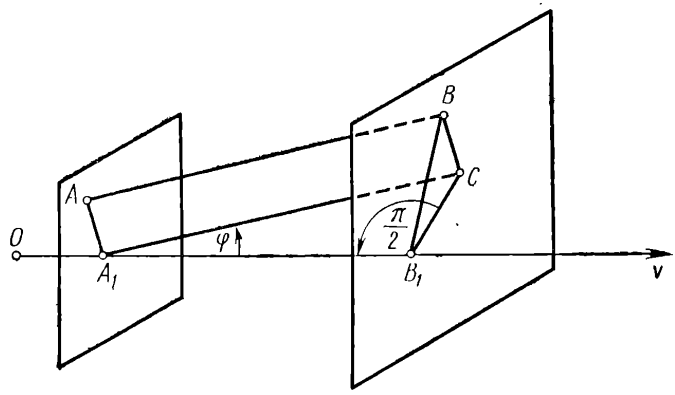

Рис. 4.5

принимать значения от 0 до π. Если угол φ острый, то, рассматривая прямоугольный треугольник A_1B_1C (рис. 4.5), находим:

$$\text{пр}_v \overline{AB} = A_1B_1 = |\overline{A_1B_1}| = |\overline{A_1C}| \cos\varphi = |\overline{AB}| \cos\varphi. \quad (4.28)$$

Если угол φ тупой, то очевидно, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{A_1C}$ направлены противоположно оси v, следовательно,

$$\text{пр}_v \overline{AB} = A_1B_1 = -|\overline{A_1B_1}| = -|\overline{A_1C}| \cos(\pi - \varphi) = |\overline{A_1C}| \cos\varphi = |\overline{AB}| \cos\varphi. \quad (4.29)$$

Соотношения (4.28) и (4.29) одинаковы, следовательно, при любом φ

$$\text{пр}_v \overline{AB} = |AB| \cos\varphi, \quad (4.30)$$

или

$$\text{пр}_v \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos\varphi. \quad (4.31)$$

Итак, проекция вектора на ось равна произведению его модуля на косинус угла наклона вектора к этой оси. Очевидно, если к двум равным векторам применить равенство (4.31), то получим одинаковые результаты, т. е. равные векторы имеют равные проекции на одну и ту же ось.

§ 8. ПРОЕКЦИИ ВЕКТОРА НА ОСИ КООРДИНАТ

Пусть в пространстве задана система прямоугольных координат. Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{a}$. Проекции вектора $\mathbf{a}$ на координатные оси Ox, Oy и Oz обозначим соответственно через X,

Y и Z. Эти проекции вектора $\mathbf{a}$ называются его *координатами*, поэтому символически обозначают

$$\mathbf{a}=\{X;\ Y;\ Z\} \text{ или } \overline{AB}=\{X;\ Y;\ Z\}.$$

Поставим перед собой задачу вычислить координаты вектора, т. е. его проекции на оси координат, если известны координаты начала и конца.

Пусть даны координаты точки начала вектора $A\ (x_1;\ y_1;\ z)$ и координаты точки конца вектора $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Проведем через точки A и B плоскости, перпендикулярные оси Ox. Точки пересечения этих плоскостей с осью Ox обозначим через A_1 и B_1 (рис. 4.6).

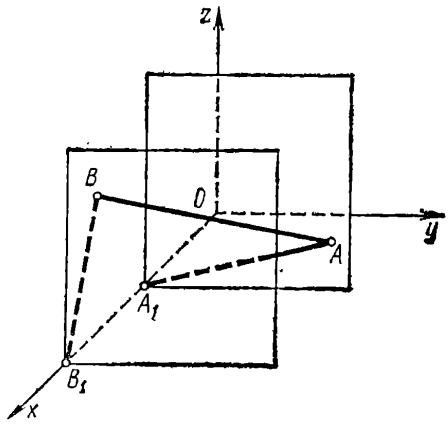

Рис. 4.6

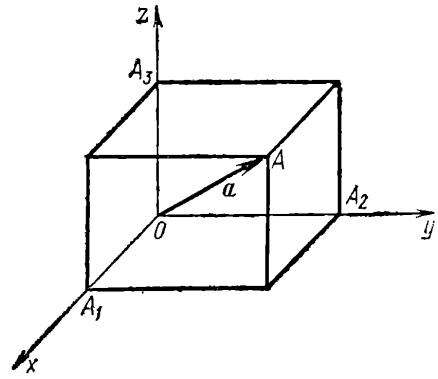

Рис. 4.7

Точки A_1 и B_1 имеют на оси Ox соответственно координаты x_1, x_2. В силу теоремы 1 (§ 1 гл. 1) имеем $A_1B_1=x_2-x_1$. Но $A_1B_1=X$, следовательно,

$$X=x_2-x_1. \tag{4.32}$$

Аналогично

$$Y=y_2-y_1; \tag{4.33}$$

$$Z=z_2-z_1. \tag{4.34}$$

Таким образом, координаты вектора можно получить, если от координат его конца отнять соответствующие координаты начала.

Пусть дан произвольный вектор $\mathbf{a}=\{X;\ Y;\ Z\}$. Выведем формулу, позволяющую вычислять модуль этого вектора, зная его координаты X; Y; Z. Для простоты вывода будем считать, что вектор $\mathbf{a}$ имеет своим началом точку $O(0;\ 0;\ 0)$. Через конец вектора A проведем плоскости, перпендикулярные к осям координат Ox, Oy, Oz; точки пересечения этих плоскостей с осями координат обозначим соответственно через A_1, A_2, A_3 (рис. 4.7). Проведенные плоскости вместе с координатными плоскостями xOz, xOy, yOz образуют прямоугольный параллелепипед, диагональю которого служит отрезок $\overline{OA}$. Так как квадрат длины диагонали прямоугольного

параллелепипеда равен сумме квадратов длин трех его смежных сторон, то

$$OA^2 = OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2. \qquad (4.35)$$

С другой стороны,

$$OA = |\mathbf{a}|,\ OA_1 = X,\ OA_2 = Y,\ OA_3 = Z.$$

В результате подстановки этих значений в равенство (4.35), получим

$$|\mathbf{a}|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

или

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \qquad (4.36)$$

Соотношение (4.36) дает искомое выражение модуля произвольного вектора через его координаты.

Пример 1. Даны точки $A(3;\ -1;\ 2)$ и $B(-1;\ 2;\ 1)$. Найти координаты вектора $\overline{AB}$.

Решение. Для нахождения координат вектора $\overline{AB}$, т. е. его проекций на оси координат, воспользуемся равенствами (4.32), (4.33) и (4.34):

$$X = x_2 - x_1 = -1 - 3 = -4;$$

$$Y = y_2 - y_1 = 2 - (-1) = 3;$$

$$Z = z_2 - z_1 = 1 - 2 = -1.$$

Таким образом, вектор $\overline{AB}$ имеет координаты $\overline{AB} = \{-4;\ 3;\ -1\}$.

Пример 2. Вычислить модуль вектора $\mathbf{a} = \{6;\ 3;\ -2\}$.

Решение. Для вычисления модуля вектора $\mathbf{a}$ воспользуемся равенством (4.36):

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2} = 7.$$

Упражнения

1. Вычислить модуль (длину) вектора $\mathbf{a} = \{6;\ 3;\ -2\}$.

Отв. $|\mathbf{a}| = 7$ ед.

2. Вектор $\mathbf{a}$ задан координатами концов A (2; 4; —3) и B (—4; 4; —5). Найти координаты середины отрезка $\overline{AB}$.

Отв. $x = -1;\ y = 4;\ z = -4$.

3. Даны проекции вектора $X = 4$, $Y = -12$. Определить третью проекцию Z при условии, что $|\mathbf{a}| = 13$.

Отв. $Z = \pm 3$.

4. Даны точки M (3; — 1; 2) и N (— 1; 2; 1). Найти проекции векторов $\overline{MN}$ и $\overline{NM}$.

Отв. $\overline{MN} = \{-4;\ 3;\ -1\}$; $\overline{NM} = \{4;\ -3;\ 1\}$.

5. Найти точку B, с которой совпадает конец вектора $\mathbf{a} = \{3;\ -1;\ 4\}$, если начало вектора совпадает с точкой A (1; 2; —3).

Отв. B (4; 1; 1).

6. Определить начало вектора $\mathbf{a} = \{2;\ -3;\ -1\}$, если конец вектора совпадает с точкой (1; —1; 2).

Отв. (—1; 2; 3).

§ 9. НАПРАВЛЯЮЩИЕ КОСИНУСЫ

В общем случае свободный вектор $\mathbf{a}$ составляет с осями координат Ox, Oy, Oz некоторые углы. Обозначим их соответственно через α, β, γ. Направление свободного вектора определено, если заданы косинусы углов α, β, γ, т. е. $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$, которые и называются *направляющими косинусами*. Если же задан еще модуль вектора $|\mathbf{a}|$, то вектор определен вполне.

Учитывая соотношения (4.31), координаты вектора можно вычислить по формулам

$$X=|\mathbf{a}|\cos\alpha,\ Y=|\mathbf{a}|\cos\beta,\ Z=|\mathbf{a}|\cos\gamma. \tag{4.37}$$

Направляющие косинусы вектора можно вычислить, зная координаты этого вектора. В самом деле, из соотношений (4.37) имеем

$$\cos\alpha=\frac{X}{|\mathbf{a}|},\ \cos\beta=\frac{Y}{|\mathbf{a}|},\ \cos\gamma=\frac{Z}{|\mathbf{a}|}.$$

Используя соотношение (4.36), получим

$$\cos\alpha=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\ \cos\beta=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\ \cos\gamma=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}. \tag{4.38}$$

Возведем в квадрат левую и правую части каждого из равенств (4.38) и просуммируем полученные результаты:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{X^2+Y^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2},$$

или

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \tag{4.39}$$

Соотношение (4.39) позволяет вычислить любой из углов α, β, γ, если известны два других.

Пример 1. Вектор $\mathbf{a}$ составляет с осями координат острые углы α, β, γ, причем $\alpha=45°$, $\beta=60°$. Найти его координаты, если $|\mathbf{a}|=3$.

Решение. Используя соотношение (4.39), найдем угол γ:

$$\cos^2 45°+\cos^2 60°+\cos^2\gamma=1,$$

откуда

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cos\gamma=1$$

и

$$\cos^2\gamma=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Так как по условию угол γ острый, то $\cos\gamma=\frac{1}{2}$ и $\gamma=60°$. По формулам (4.37) находим координаты вектора $\mathbf{a}$:

$$X=|\mathbf{a}|\cos\alpha=3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}},$$

$$Y=|\mathbf{a}|\cos\beta=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$Z=|\mathbf{a}|\cos\gamma=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Таким образом, данный вектор имеет координаты

$$\mathbf{a}=\left\{\frac{3}{\sqrt{2}};\ \frac{3}{2};\ \frac{3}{2}\right\}.$$

Пример 2. Вычислить направляющие косинусы вектора $\mathbf{a}=\{12;-15;\ -16\}$.

Решение. Значения направляющих косинусов вектора $\mathbf{a}$ найдем, используя равенства (4.38):

$$\cos\alpha=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}=\frac{12}{\sqrt{12^2+(-15)^2+(-16)^2}}=\frac{12}{25};$$

$$\cos\beta=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}=\frac{-15}{\sqrt{12^2+(-15)^2+(-16)^2}}=-\frac{3}{5};$$

$$\cos\gamma=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}=\frac{-16}{\sqrt{12^2+(-15)^2+(-16)^2}}=-\frac{16}{25}.$$

Таким образом, направляющие косинусы данного вектора $\mathbf{a}$ соответственно равны:

$$\cos\alpha=\frac{12}{25},\quad \cos\beta=-\frac{3}{5},\quad \cos\gamma=-\frac{16}{25}.$$

Упражнения

1. Известны модуль вектора $|\mathbf{a}|=2$ и углы, образуемые им с осями координат: $\alpha=45°$, $\beta=60°$ и $\gamma=120°$. Найти координаты вектора $\mathbf{a}$.

Отв. $\mathbf{a}=\{\sqrt{2};\ 1;\ -1\}$.

2. Определить направляющие косинусы вектора $\mathbf{a}=\{2;\ -5;\ -6\}$.

Отв. $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{65}}$, $\cos\beta=-\frac{5}{\sqrt{65}}$, $\cos\gamma=-\frac{6}{\sqrt{65}}$.

3. Определить направляющие косинусы вектора $\mathbf{a}=\left\{\frac{3}{13};\ \frac{4}{13};\ \frac{12}{13}\right\}$.

Отв. $\cos\alpha=\frac{3}{13}$, $\cos\beta=\frac{4}{13}$, $\cos\gamma=\frac{12}{13}$.

4. Вектор $\mathbf{a}$ составляет с координатными осями Ox и Oy углы $\alpha=60°$ и $\beta=120°$. Найти проекции вектора, если $|\mathbf{a}|=2$.

Отв. $\mathbf{a}=\{1;\ -1;\ \sqrt{2}\}$ или $\mathbf{a}=\{1;\ -1;\ -\sqrt{2}\}$.

5. Вектор составляет с осями Ox и Oz углы $\alpha=120°$ и $\gamma=45°$. Какой угол этот вектор образует с осью Oy?

Отв. $\beta=60°$ или $\beta=120°$.

§ 10. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ

Пусть в выбранной в пространстве прямоугольной системе координат заданы две точки $N_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $N_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Выразим расстояние d между этими двумя точками через их координаты.

Очевидно, искомое расстояние d является модулем вектора $\overline{N_1N_2}$, проведенного через данные точки N_1, N_2. Модуль вектора $\overline{N_1N_2}$

можно вычислить, зная его координаты, по формуле (4.36). Итак, используя соотношения (4.32), (4.33), (4.34) и (4.35), получаем

$$\overline{N_1N_2}=\{X;\ Y;\ Z\},$$

или

$$\overline{N_1N_2}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\}.$$

Далее имеем

$$|\overline{N_1N_2}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2},$$

или

$$|\overline{N_1N_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

С другой стороны,

$$|\overline{N_1N_2}|=d,$$

следовательно,

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}, \qquad (4.40)$$

т. е. *расстояние между двумя точками равно квадратному корню из суммы квадратов разностей одноименных координат этих точек.*

Пример 1. Найти расстояние между точками $A(1;\ -2;\ -3)$ и точкой $B(3;\ 1;\ -9)$.

Решение. Искомое расстояние определяем по формуле (4.40):

$$d=\sqrt{(3-1)^2+(1+2)^2+(-9+3)^2}=7 \text{ единиц длины.}$$

Пусть заданы две точки $N_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $N_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ и известно отношение λ, в котором некоторая точка $N(x;\ y;\ z)$ делит направ-

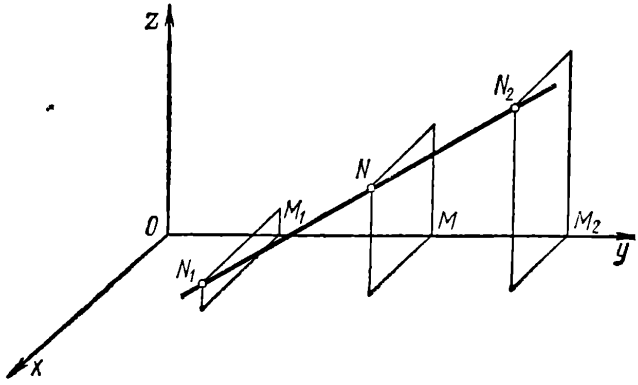

Рис. 4.8

ленный отрезок $\overline{N_1N_2}$, т. е. $\lambda=\frac{N_1N}{NN_2}$, где N_1N и NN_2 есть величины направленных отрезков $\overline{N_1N}$ и $\overline{NN_2}$. Найдем координаты точки N. Для этого через точки N_1, N и N_2 проведем плоскости, перпендикулярные оси Oy. Точки пересечения этих плоскостей с осью Oy обозначим соответственно через M_1, M, M_2 (рис. 4.8). Тогда $\frac{\overline{N_1N}}{\overline{NN_2}}=\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}}$ как пропорциональные отрезки между двумя парал-

лельными прямыми. Величины этих направленных отрезков удовлетворяют аналогичному соотношению

$$\frac{N_1N}{NN_2}=\frac{M_1M}{MM_2}. \tag{4.41}$$

Так как $M_1M=y-y_1$, $MM_2=y_2-y$ (в силу теоремы 1 § 1 гл. 1 и условия $\lambda=\frac{N_1N}{NN_2}$), то равенство (4.41) принимает вид

$$\lambda=\frac{y-y_1}{y_2-y},$$

откуда

$$\lambda(y_2-y)=y-y_1, \text{ или } \lambda y_2-\lambda y=y-y_1.$$

Следовательно, $y_1+\lambda y_2=y+\lambda y$, или $y_1+\lambda y_2=y(1+\lambda)$. Окончательно имеем

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{4.42}$$

Для нахождения координат x и z искомой точки N спроектируем точки N_1, N, N_2 на оси Ox и Oy. Аналогично рассмотренному выше получим

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \tag{4.43}$$

$$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{4.44}$$

Если в равенствах (4.42), (4.43) и (4.44) положить $\lambda=1$, то

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \quad z=\frac{z_1+z_2}{2}. \tag{4.45}$$

Пример 2. Отрезок прямой, ограниченный точками $A(-1; 8; 3)$ и $B(9; -7; -2)$, разделен точками C, D, E, F на пять равных частей. Найти координаты точек деления.

Решение. 1) По условию точка C делит отрезок $\overline{AB}$ в отношении $\lambda_C=\frac{AC}{CB}=\frac{1}{4}$. По формулам (4.42), (4.43) и (4.44) находим:

$$x_C=\frac{x_A+\lambda_C x_B}{1+\lambda_C}=\frac{-1+\frac{1}{4}\cdot 9}{1+\frac{1}{4}}=1;$$

$$y_C=\frac{y_A+\lambda_C y_B}{1+\lambda_C}=\frac{8+\frac{1}{4}\cdot(-7)}{1+\frac{1}{4}}=5;$$

$$z_C=\frac{z_A+\lambda_C z_B}{1+\lambda_C}=\frac{3+\frac{1}{4}\cdot(-2)}{1-\frac{1}{4}}=2.$$

Таким образом, найдена точка $C(1; 5; 2)$.

2) По условию точка D делит отрезок $\overline{AB}$ в отношении $\lambda_D = \frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$. Применяя формулы (4.42), (4.43) и (4.44), находим:

$$x_D = \frac{x_A + \lambda_D x_B}{1+\lambda_D} = \frac{-1+\frac{2}{3}\cdot 9}{1+\frac{2}{3}} = 3;$$

$$y_D = \frac{y_A + \lambda_D y_B}{1+\lambda_D} = \frac{8+\frac{2}{3}\cdot(-7)}{1+\frac{2}{3}} = 2;$$

$$z_D = \frac{z_A + \lambda_D z_B}{1+\lambda_D} = \frac{3+\frac{2}{3}\cdot(-2)}{1+\frac{2}{3}} = 1.$$

Таким образом, найдена точка $D(3;\ 2;\ 1)$.

3) По условию точка E делит отрезок $\overline{AB}$ в отношении $\lambda_E = \frac{AE}{EB} = \frac{3}{2}$. По формулам (4.42), (4.43) и (4.44) находим:

$$x_E = \frac{x_A + \lambda_E x_B}{1+\lambda_E} = \frac{-1+\frac{3}{2}\cdot 9}{1+\frac{3}{2}} = 5;$$

$$y_E = \frac{y_A + \lambda_E y_B}{1+\lambda_E} = \frac{8+\frac{3}{2}\cdot(-7)}{1+\frac{3}{2}} = -1;$$

$$z_E = \frac{z_A + \lambda_E z_B}{1+\lambda_E} = \frac{3+\frac{3}{2}\cdot(-2)}{1+\frac{3}{2}} = 0.$$

Таким образом, найдена точка $E(5;\ -1;\ 0)$.

4) По условию точка F делит отрезок $\overline{AB}$ в отношении $\lambda_F = \frac{AF}{FB} = \frac{4}{1} = 4$. Применяя формулы (4.42), (4.43) и (4.44), находим:

$$x_F = \frac{x_A + \lambda_F x_B}{1+\lambda_F} = \frac{-1+4\cdot 9}{1+4} = 7;$$

$$y_F = \frac{y_A + \lambda_F y_B}{1+\lambda_F} = \frac{8+4\cdot(-7)}{1+4} = -4;$$

$$z_F = \frac{z_A + \lambda_F z_B}{1+\lambda_F} = \frac{3+4\cdot(-2)}{1+4} = -1.$$

Таким образом, найдена точка $F(7,\ -4,\ -1)$.

Упражнения

1. Найти расстояние между точками $A(1; -2; -3)$ и $B(3; 1; -9)$.
Отв. 7 ед.
2. Найти расстояние между точками $M(2; -3; 0)$ и $N(-1; 1; -12)$.
Отв. 13 ед.
3. Доказать, что треугольник с вершинами $A(3; -1; 2)$, $B(0; 4; 2)$ и $C(-3; 2; 1)$ — равнобедренный.
4. На оси ординат найти точку, равноудаленную от точек $A(1; -3; 7)$ и $B(5; 7; -5)$.
Отв. $(0; 2; 0)$.
5. Даны вершины треугольника $A(3; 2; -5)$, $B(1; -4; 3)$ и $C(-3; 0; 1)$. Найти середины сторон.
Отв. $(2; -1; -1)$, $(-1; -2; 2)$, $(0; 1; -2)$.
6. Даны три вершины $A(3; -4; 7)$, $B(-5; 3; -2)$ и $C(1; 2; -3)$ параллелограмма $ABCD$. Найти четвертую вершину D, противоположную B.
Отв. $D(9; -5; 6)$.
7. Определить координаты концов Q и P отрезка, который точками $M(2; 0; 2)$ и $N(5; -2; 0)$ разделен на три равные части.
Отв. $Q(-1; 2; 4)$ и $P(8; -4; -2)$.

§ 11. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Операции сложения (вычитания) векторов и умножения вектора на число называются *линейными операциями*.

Суммой двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, построенных так, что начало вектора $\mathbf{b}$ совпадает с концом вектора $\mathbf{a}$, называется вектор $\mathbf{c}$, идущий из начала вектора $\mathbf{a}$ в конец вектора $\mathbf{b}$ (рис. 4.9).

Может оказаться, что при построении суммы $\mathbf{c}$ конец вектора $\mathbf{b}$ совпадает с началом вектора $\mathbf{a}$. Тогда $\mathbf{c}=a+b$ есть нулевой вектор: $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{0}$. После того как определена сумма двух векторов, можно определить сумму любого числа векторных слагаемых.

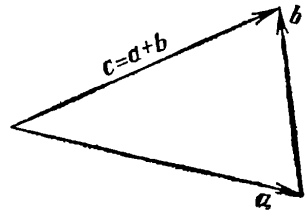

Рис. 4.9

Практически построение суммы нескольких векторов нет надобности выполнять последовательно, фиксируя каждый промежуточный результат. Сумма любого числа векторов может быть построена сразу при помощи следующего правила: *чтобы построить сумму* n *векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, *нужно начало вектора* $\mathbf{a}_2$ *поместить в конец вектора* $\mathbf{a}_1$, *начало вектора* $\mathbf{a}_3$ *— в конец вектора* $\mathbf{a}_2$, *начало вектора* $\mathbf{a}_4$ *— в конец вектора* $\mathbf{a}_3$ *и т. д., начало вектора* $\mathbf{a}_n$ *— в конец вектора* $\mathbf{a}_{n-1}$ (рис. 4.10).

Вектор $\mathbf{c}$, идущий от начала первого вектора $\mathbf{a}_1$ к концу последнего $\mathbf{a}_n$, называется *суммой* данных *векторов*:

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3+\ldots+\mathbf{a}_n.$$

Иначе говоря, построение суммы нескольких векторов производится при помощи замыкания ломаной.

Построение суммы векторов называется *сложением векторов*. Сложение векторов обладает переместительным и сочетательным свойствами. Рассмотрим два произвольных свободных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Приложим оба вектора к одной произвольной точке D и обозначим концы векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ соответственно через A и B (рис. 4.11). Приложим вектор $\mathbf{a}$ к концу вектора $\mathbf{b}$ (точка B) и обозначим конец вектора $\mathbf{a}$ при новом расположении через C. Точку A соединим с точкой C отрезком $\overline{AC}$. Очевидно, что вектор $\overline{AC}$ имеет такую же длину и направлен так же, как вектор $\overline{DB}$, следовательно, $\overline{AC} = \mathbf{b}$. Из треугольника DBC находим

$$\overline{DC} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

С другой стороны, из треугольника DAC следует, что

$$\overline{DC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Сравнивая эти равенства, можно записать

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}. \tag{4.46}$$

Свойство сложения векторов, выраженное тождеством (4.46), называется *переместительным*, т. е. сумма любых двух векторов не зависит от порядка слагаемых.

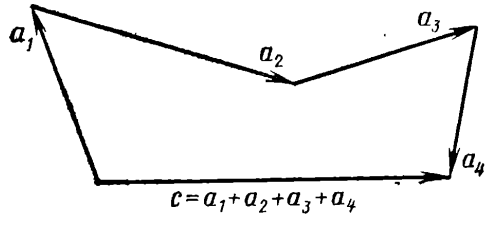

Рис. 4.10

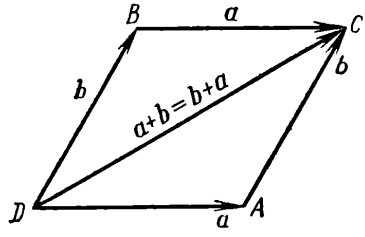

Рис. 4.11

Правило сложения векторов можно сформулировать следующим образом: *суммой векторов* $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ *называется третий вектор* $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ (или $\mathbf{b} + \mathbf{a}$), *исходящий из общего начала данных векторов и являющийся диагональю параллелограмма, построенного на данных векторах* (рис. 4.11). Этот способ сложения называют *правилом параллелограмма*.

Пусть заданы три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Расположим данные векторы так, чтобы вектор $\mathbf{b}$ был приложен к концу вектора $\mathbf{a}$, а вектор $\mathbf{c}$ — к концу вектора $\mathbf{b}$. Начало вектора $\mathbf{a}$ обозначим буквой D, конец его — буквой A, конец вектора $\mathbf{b}$ — буквой B, конец вектора $\mathbf{c}$ — буквой C (рис. 4.12). Тогда

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = (\overline{DA} + \overline{AB}) + \overline{BC} = \overline{DB} + \overline{BC} = \overline{DC},$$
$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \overline{DA} + (\overline{AB} + \overline{BC}) = \overline{DA} + \overline{AC} = \overline{DC}.$$

Сравнивая эти равенства, получим

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}). \tag{4.47}$$

Свойство сложения векторов, выраженное тождеством (4.47), называется *сочетательным*. На основании сочетательного свойства

сложения векторов сумма трех векторов записывается в виде $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$. *Разностью* векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется такой третий вектор $\mathbf{c}$, который в сумме с вектором $\mathbf{b}$ дает вектор $\mathbf{a}$. Обозначается разность векторов через $\mathbf{a}-\mathbf{b}$. Построение вектора $\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$ называется *вычитанием векторов*.

Пусть даны два свободных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, которые приведены к общему началу в точке D. Концы этих векторов обозначим соответственно через A и B (рис. 4.13). Согласно определению $\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{a}$, поэтому разность $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ представляет собой вектор $\overline{BA}$, т. е.

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\overline{BA}.$$

Таким образом, разность двух векторов $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, приведенных к общему началу, есть вектор $\mathbf{c}$, идущий из конца вычитаемого вектора $\mathbf{b}$

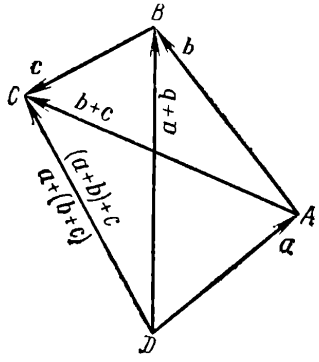

Рис. 4.12

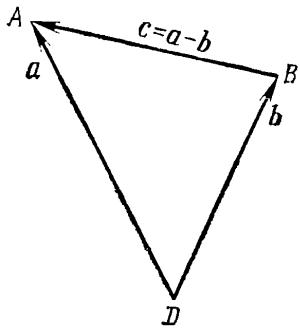

Рис. 4.13

к концу уменьшаемого вектора $\mathbf{a}$. Вектор $-\mathbf{a}$ называется *обратным* вектору $\mathbf{a}$ и направлен противоположно ему. Поэтому векторы $\mathbf{a}$ и $-\mathbf{a}$ иногда называют *противоположными*.

Легко видеть, что сумма двух противоположных векторов $\mathbf{a}$ и $-\mathbf{a}$ равна нулевому вектору

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}. \tag{4.48}$$

Из тождества (4.48) следует, что

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b}), \tag{4.49}$$

т. е. вычитание вектора $\mathbf{b}$ равносильно сложению противоположного вектора $-\mathbf{b}$. Равенство (4.49) особенно удобно использовать в том случае, когда над несколькими векторами необходимо по очереди произвести сложение и вычитание векторов и построить результат.

Пусть даны свободный вектор $\mathbf{a}$ и число λ. *Произведением вектора* $\mathbf{a}$ *на действительное число* λ называется вектор $\lambda\mathbf{a}$, имеющий длину, равную $|\lambda||\mathbf{a}|$, коллинеарный вектору $\mathbf{a}$ и направленный в одну сторону с вектором $\mathbf{a}$ при $\lambda>0$ и в противоположную при $\lambda<0$. Если обозначить через $\mathbf{a}^0$ единичный вектор, коллинеарный

вектору $\mathbf{a}$ и направленный одинаково с ним, то между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}^\circ$ легко установить соответствие:

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \mathbf{a}^\circ. \tag{4.50}$$

Построение произведения вектора $\mathbf{a}$ на число λ называется *умножением вектора* $\mathbf{a}$ на *число*.

Если $\mathbf{a} = 0$ или $\lambda = 0$, то произведение имеет модуль, равный нулю и, следовательно, представляет собой нулевой вектор.

Умножение вектора $\mathbf{a}$ на число λ можно рассматривать как операцию удлинения вектора $\mathbf{a}$ в λ раз, что наглядно иллюстрирует смысл умножения вектора на число.

Для операции умножения вектора на число справедливы следующие законы умножения:

1) $\mu(\lambda\mathbf{a}) = \mu\lambda(\mathbf{a})$, где μ — число (сочетательный);

2) $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ (распределительный по отношению к векторному множителю);

3) $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ (распределительный по отношению к числовому множителю).

Справедливость первого из тождеств очевидна: при удлинении вектора $\mathbf{a}$ в λ раз и затем еще в μ раз получается такой же вектор, как при удлинении вектора $\mathbf{a}$ сразу в $\mu\lambda$ раз. Справедливо и второе из тождеств: при удлинении вектора $\mathbf{a}$ в $(\lambda + \mu)$ раз получается такой же вектор, как при сложении вектора $\mathbf{a}$, удлиненного в λ раз, с вектором $\mathbf{a}$, удлиненным в μ раз. Справедливость третьего из тождеств вытекает из теории подобия фигур. Действительно, вектор $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ есть диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. При удлинении векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в λ раз этот параллелограмм превратится в другой параллелограмм, подобный данному, у которого стороны будут соответственно равны $\lambda\mathbf{a}$ и $\lambda\mathbf{b}$, а диагональ равна $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b})$. Отсюда следует, что $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$ (рис. 4.14).

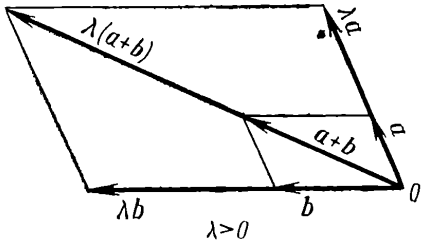

Рис. 4.14

Пример 1. В треугольнике OAB даны векторы $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$. Найти векторы $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$, где M — середина стороны AB.

Решение. Согласно правилу сложения векторов (рис. 4.15) имеем: $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ или $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, откуда $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Вектор $\overrightarrow{MB}$ направлен в ту же сторону и по той же прямой, что и $\overrightarrow{AB}$, но длина его в два раза меньше, поэтому

$$\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Вектор $\overrightarrow{MA}$ имеет ту же длину, что и $\overrightarrow{MB}$, но направлен в противоположную сторону. Следовательно,

$$\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b}).$$

Пример 2. По данным векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ построить векторы $2\mathbf{a}-\mathbf{b}$ и $\mathbf{b}-\frac{\mathbf{a}}{2}$.

Решение. См. рис. 4.16.

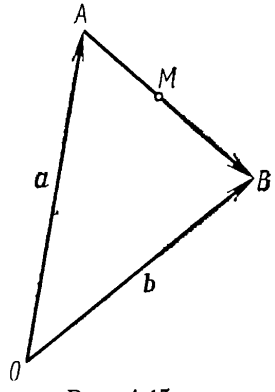

Рис. 4.15

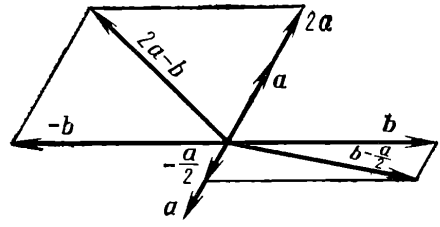

Рис. 4.16

Упражнения

1. По данным векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ построить каждый из следующих векторов:

а) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$; б) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$; в) $\mathbf{b}-\mathbf{a}$; г) $-\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

2. По данным векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ построить каждый из следующих векторов:

а) $3\mathbf{a}$; б) $-\frac{1}{2}\mathbf{b}$; в) $2\mathbf{a}+\frac{1}{3}\mathbf{b}$; г) $\frac{1}{2}\mathbf{a}-3\mathbf{b}$.

§ 12. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРОЕКЦИЯХ ВЕКТОРОВ

Теорема 1. *Проекция суммы векторов равна сумме проекций слагаемых на эту же ось*:

$$\text{пр}_v(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \text{пр}_v\mathbf{a} + \text{пр}_v\mathbf{b}.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}=\overline{AB}$, $\mathbf{b}=\overline{BC}$ (рис. 4.17). Очевидно, что

$$\text{пр}_v\overline{AB} = A_1B_1, \quad \text{пр}_v\overline{BC} = B_1C_1, \quad \text{пр}_v\overline{AC} = A_1C_1,$$

где $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$.

Из теоремы 1, доказанной в § 1 главы 1 (теорема о сложении величин направленных отрезков), следует, что при любом расположении на оси точек A_1, B_1, C_1 справедливо равенство

$$A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1,$$

откуда

$$\text{пр}_v\overline{AB} + \text{пр}_v\overline{BC} = \text{пр}_v(\overline{AB}+\overline{BC}),$$

или

$$\text{пр}_v\mathbf{a} + \text{пр}_v\mathbf{b} = \text{пр}_v(\mathbf{a}+\mathbf{b}).$$

Теорема 1 остается справедливой и для суммы n векторов.

Теорема 2. *При умножении вектора на какое-нибудь число его проекция умножается на это же число:*

$$\text{пр}_v \lambda \mathbf{a} = \lambda \, \text{пр}_v \mathbf{a}.$$

Доказательство. Пусть φ — угол между вектором $\mathbf{a}$ и осью v. Тогда, если $\lambda > 0$, то угол между вектором $\lambda\mathbf{a}$ и осью v также равен φ и в соответствии с равенством (4.31) имеем

$$\text{пр}_v \lambda \mathbf{a} = \lambda \, |\mathbf{a}| \cos \varphi = \lambda \, \text{пр}_v \mathbf{a}.$$

Если же $\lambda < 0$, то длина вектора $\lambda\mathbf{a}$ равна $-\lambda |\mathbf{a}|$, направление вектора $\lambda\mathbf{a}$ противоположно направлению $\mathbf{a}$, и угол между вектором $\lambda\mathbf{a}$ и осью v равен $(\pi + \varphi)$. В этом случае также

$$\text{пр}_v \lambda \mathbf{a} = -\lambda \, |\mathbf{a}| \cos (\pi + \varphi) = \lambda \, |\mathbf{a}| \cos \varphi = \lambda \, \text{пр}_v \mathbf{a}.$$

Теорема доказана.

Следовательно, при удлинении вектора $\mathbf{a}$ в λ раз его проекция также увеличивается в λ раз. Было установлено, что свободный

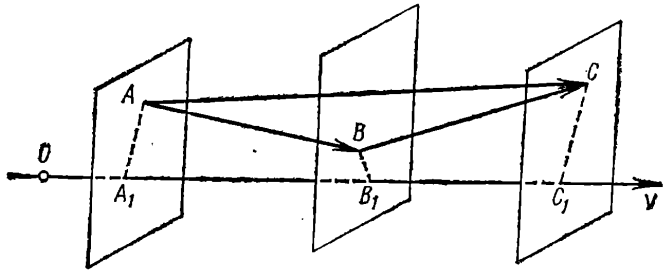

Рис. 4.17

вектор в пространстве вполне может быть задан тремя числами — его координатами. Доказанные выше теоремы 1 и 2 дают возможность производить арифметические операции с координатами векторов, которые соответствуют линейным операциям, производимым над самими векторами. Так, согласно теореме 1, при сложении векторов их координаты складываются, т. е. если

$$\mathbf{a} = \{X_a, \; Y_a, \; Z_a\} \text{ и } \mathbf{b} = \{X_b, \; Y_b, \; Z_b\},$$

то

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{X_a + X_b, \; Y_a + Y_b, \; Z_a + Z_b\}. \tag{4.51}$$

Отсюда также следует, что

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \{X_a - X_b, \; Y_a - Y_b, \; Z_a - Z_b\}. \tag{4.52}$$

Далее, согласно теореме 2, при умножении вектора $\mathbf{a}$ на число λ его координаты умножаются на то же число, т. е. если $\mathbf{a} = \{X, Y, Z\}$, то для любого числа λ справедливо соотношение $\lambda\mathbf{a} = \{\lambda X, \lambda Y, \lambda Z\}$.

Выведем условие коллинеарности двух векторов, заданных своими координатами. Очевидно, векторы $\mathbf{a} = \{X_a, Y_a, Z_a\}$ и $\mathbf{b} = \{X_b, Y_b, Z_b\}$

коллинеарны в том и только в том случае, когда один из них может быть получен умножением другого на некоторое число μ:

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{a} \quad (\mathbf{a} \neq 0).$$

Это векторное равенство равносильно следующим трем равенствам:

$$X_b = \lambda X_a, \quad Y_b = \lambda Y_a, \quad Z_b = \lambda Z_a,$$

т. е. координаты вектора $\mathbf{b}$ пропорциональны координатам вектора $\mathbf{a}$. Таким образом, векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны в том и только в том случае, если

$$\frac{X_b}{X_a} = \frac{Y_b}{Y_a} = \frac{Z_b}{Z_a}, \tag{4.53}$$

т. е. когда их координаты пропорциональны.

Пример 1. Пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — единичные векторы, составляющие с данной осью u соответственно углы $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, π. Найти проекцию на ось u вектора $\mathbf{d} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$.

Решение. В соответствии с теоремами 1 и 2 имеем

$$\text{пр}_u \mathbf{d} = \text{пр}_u (3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}) = 3\,\text{пр}_u \mathbf{a} + 2\,\text{пр}_u \mathbf{b} + \text{пр}_u \mathbf{c}.$$

По формуле (4.31)

$$\text{пр}_u \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

так как $\mathbf{a}$ — единичный вектор, т. е. $|\mathbf{a}| = 1$. Аналогично находим

$$\text{пр}_u \mathbf{b} = -\frac{1}{2}, \quad \text{пр}_u \mathbf{c} = -1.$$

Поэтому

$$\text{пр}_u \mathbf{d} = \text{пр}_u (3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}) = 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Определить, при каких значениях α и β векторы $\mathbf{a} = \{2;\ \alpha;\ 1\}$ и $\mathbf{b} = \{3;\ -6;\ \beta\}$ коллинеарны.

Решение. Чтобы векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ были коллинеарны, необходимо, чтобы координаты их были пропорциональны, т. е.

$$\frac{3}{2} = \frac{-6}{\alpha} = \frac{\beta}{1}.$$

Отсюда находим $\alpha = -4$, $\beta = 3/2$. Очевидно, что при этих значениях α и β векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны.

Упражнения

1. Даны модули векторов: $|\mathbf{a}| = 13$, $|\mathbf{b}| = 19$ и $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 24$. Найти $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$. *Отв.* $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 22$.
2. Даны модули векторов: $|\mathbf{a}| = 11$, $|\mathbf{b}| = 23$ и $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 30$. Найти $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$. *Отв.* $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 20$.
3. Даны векторы $\mathbf{a} = \{3;\ -2;\ 6\}$ и $\mathbf{b} = \{-2;\ 1;\ 0\}$. Определить проекции на координатные оси следующих векторов:

а) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$; б) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$; в) $2\mathbf{a}$; г) $-\frac{1}{2}\mathbf{b}$; д) $2\mathbf{a}+3\mathbf{b}$; е) $\frac{1}{3}\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

Отв. а) $\{1;\ -1;\ 6\}$; б) $\{5;\ -3;\ 6\}$; в) $\{6;\ -4;\ 12\}$; г) $\left\{1;\ -\frac{1}{2};\ 0\right\}$; д) $\{0;\ -1;\ 12\}$; е) $\left\{3;\ -\frac{5}{3};\ 2\right\}$.

4. Проверить коллинеарность векторов $\mathbf{a}=\{2;\ -1;\ 3\}$ и $\mathbf{b}=\{-6;\ 3;\ -9\}$. Установить, какой из этих векторов длиннее другого и во сколько раз. Как направлены векторы — в одну или в противоположные стороны?

Отв. Вектор $\mathbf{b}$ длиннее вектора $\mathbf{a}$ в три раза; векторы направлены в противоположные стороны.

5. Определить, при каких значениях α и β векторы $\mathbf{a}=\{-2;\ 3;\ \beta\}$ и $\mathbf{b}=\{\alpha;\ -6;\ 2\}$ коллинеарны.

Отв. $\alpha=4$, $\beta=-1$.

§ 13. РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА СОСТАВЛЯЮЩИЕ

Пусть в пространстве задана прямоугольная система координат и произвольный вектор $\mathbf{a}$. Для простоты изложения будем считать, что начало вектора $\mathbf{a}$ находится в начале координат. Конец вектора обозначим через M, тогда $\mathbf{a}=\overline{OM}$ (рис. 4.18). Введем в рассмотрение векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Эти векторы определяются следующими условиями:

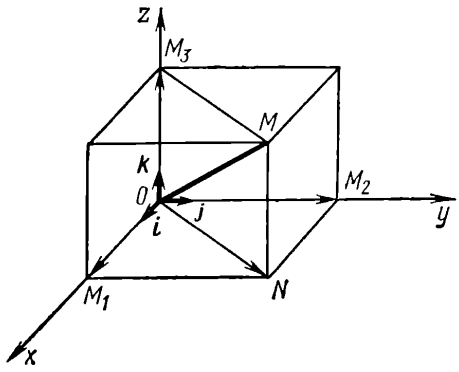

Рис. 4.18

1) векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные, т. е. $|\mathbf{i}|=1$, $|\mathbf{j}|=1$, $|\mathbf{k}|=1$;

2) вектор $\mathbf{i}$ лежит на оси Ox, вектор $\mathbf{j}$ — на оси Oy, вектор $\mathbf{k}$ — на оси Oz;

3) каждый из единичных векторов или орт направлен по своей оси в положительную сторону.

Спроектируем точку M на оси координат. Получим на оси Ox точку M_1, на оси Oy точку M_2, на оси Oz точку M_3. Согласно правилу сложения векторов (правило параллелограмма) находим

$$\overline{OM}=\mathbf{a}=\overline{ON}+\overline{OM}_3,$$

$$\overline{ON}=\overline{OM}_1+\overline{OM}_2,$$

следовательно,

$$\mathbf{a}=\overline{OM}_1+\overline{OM}_2+\overline{OM}_3. \tag{4.54}$$

Вектор $\overline{OM}_1$ есть отрезок координатной оси, поэтому его величину можно характеризовать числом X. Аналогично, обозначим величину вектора $\overline{OM}_2$ через Y и величину вектора $\overline{OM}_3$ через Z. Таким образом, числа X, Y, Z соответственно равны проекциям вектора $\overline{OM}$ на оси координат. С помощью ортов и теоремы 2 § 2 проекции вектора $\overline{OM}$ на оси координат можно записать так:

$$\overline{OM}_1=X\mathbf{i},\quad \overline{OM}_2=Y\mathbf{j},\quad \overline{OM}_3=Z\mathbf{k}.$$

Тогда равенство (4.54) принимает вид

$$\mathbf{a} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}. \tag{4.55}$$

Формула (4.55) является основной в векторной алгебре и называется *разложением вектора на составляющие*. Векторы $\overline{OM}_1 = X\mathbf{i}$, $\overline{OM}_2 = Y\mathbf{j}$, $\overline{OM}_3 = Z\mathbf{k}$ называются *составляющими* или *компонентами* вектора $\overline{OM}$. Числа X, Y, Z называются *коэффициентами разложения*. Чтобы разложить вектор $\mathbf{a}$ на составляющие, необходимо и достаточно знать проекции вектора $\mathbf{a}$ на оси координат.

Пример 1. Даны два вектора $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$. Найти проекции на координатные оси суммы и разности этих векторов.

Решение. Составим сумму этих векторов:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (2-3)\,\mathbf{i} + (3+2)\,\mathbf{j} + (-4+5)\,\mathbf{k},$$

или

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Таким образом, сумма векторов имеет координаты $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{-1; 5; 1\}$.

Составим разность этих векторов:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (2+3)\,\mathbf{i} + (3-2)\,\mathbf{j} + (-4-5)\,\mathbf{k},$$

или

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} - 9\mathbf{k}.$$

Таким образом, разность векторов имеет координаты $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \{5; 1; -9\}$.

§ 14. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ И ЕГО СВОЙСТВА

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Обозначают скалярное произведение вектора $\mathbf{a}$ на вектор $\mathbf{b}$ символом $\mathbf{ab}$. Если угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ обозначить через φ, то скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ выразится зависимостью

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\varphi. \tag{4.56}$$

Так как $|\mathbf{b}|\cos\varphi = \text{пр}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$, то

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}|\,\text{пр}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}. \tag{4.57}$$

Аналогично $|\mathbf{a}|\cos\varphi = \text{пр}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}$, следовательно,

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{b}|\,\text{пр}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}. \tag{4.58}$$

Таким образом, скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равно проекции одного из них на направление другого, умноженной на длину другого. Скалярное произведение двух векторов, как следует из определения, есть число или скаляр.

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами.

Свойство 1. Для скалярного произведения векторов справедлив переместительный закон:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}. \tag{4.59}$$

Доказательство. Используем определение скалярного произведения: $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi$ и $\mathbf{ba} = |\mathbf{b}||\mathbf{a}|\cos\varphi$. Так как $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| = |\mathbf{b}||\mathbf{a}|$, то $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$.

Свойство 2. Для скалярного произведения векторов справедлив сочетательный закон по отношению к скалярному множителю:

$$(\mathbf{ab})\lambda = \mathbf{a}(\mathbf{b}\lambda), \tag{4.60}$$

где λ — любое действительное число.

Доказательство. Выразим обе части равенства (4.60) через проекции:

$$(\mathbf{ab})\lambda = \lambda|\mathbf{a}|\,\mathrm{пр}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} \quad \text{и} \quad \mathbf{a}(\mathbf{b}\lambda) = |\mathbf{a}|\,\mathrm{пр}_{\mathbf{a}}\,\lambda\mathbf{b}. \tag{4.61}$$

С другой стороны,

$$\mathrm{пр}_{\mathbf{a}}\,\lambda\mathbf{b} = \lambda\,\mathrm{пр}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}\lambda) = |\mathbf{a}|\lambda\,\mathrm{пр}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \lambda|\mathbf{a}|\,\mathrm{пр}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}. \tag{4.62}$$

Сравнивая равенства (4.61) и (4.62), видим, что они одинаковы в правой части, т. е.

$$(\mathbf{ab})\lambda = \mathbf{a}(\mathbf{b}\lambda).$$

Из свойств 1 и 2 следует, что

$$(\mu\mathbf{a})(\lambda\mathbf{b}) = (\mu\lambda)(\mathbf{ab}). \tag{4.63}$$

Свойство 3. Чтобы сумму двух векторов умножить скалярно на третий вектор, достаточно умножить скалярно каждое из слагаемых в отдельности на этот вектор и результаты сложить, т. е.

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\,\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}. \tag{4.64}$$

Это свойство называют также *свойством распределительности относительно сложения*.

Доказательство. По формуле (4.58) имеем

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = |\mathbf{c}|\,\mathrm{пр}_{\mathbf{c}}\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}).$$

Согласно теореме 1, доказанной в § 12,

$$\mathrm{пр}_{\mathbf{c}}\,(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathrm{пр}_{\mathbf{c}}\,\mathbf{a} + \mathrm{пр}_{\mathbf{c}}\,\mathbf{b}.$$

Тогда

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = |\mathbf{c}|\,\mathrm{пр}_{\mathbf{c}}\,\mathbf{a} + |\mathbf{c}|\,\mathrm{пр}_{\mathbf{c}}\,\mathbf{b},$$

следовательно,

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}.$$

Так как скалярное произведение двух векторов есть не вектор, а число, то нет смысла говорить о скалярном произведении трех или большего числа векторных сомножителей.

Свойство 4. Скалярное произведение двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы взаимно перпендикулярны.

Доказательство. Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ взаимно перпендикулярны, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\cos\varphi = 0$. Следовательно, $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi = 0$.

Свойство 5. При скалярном умножении вектора самого на себя получается квадрат его модуля, т. е.

$$\mathbf{aa} = |\mathbf{a}|^2.$$

Доказательство. В самом деле, $\mathbf{aa} = |\mathbf{a}||\mathbf{a}| \cdot \cos 0°$, но $\cos 0° = 1$, следовательно, $\mathbf{aa} = |\mathbf{a}|^2$.

Скалярное произведение $\mathbf{aa}$ называется *скалярным квадратом вектора* $\mathbf{a}$ и обозначается символом $\mathbf{a}^2$.

Найдем скалярное произведение двух векторов, заданных своими проекциями. Пусть даны вектор $\mathbf{a} = \{X_a;\ Y_a;\ Z_a\}$ и вектор $\mathbf{b} = \{X_b;\ Y_b;\ Z_b\}$. Разложим векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ на составляющие:

$$\mathbf{a} = X_a\mathbf{i} + Y_a\mathbf{j} + Z_a\mathbf{k},$$
$$\mathbf{b} = X_b\mathbf{i} + Y_b\mathbf{j} + Z_b\mathbf{k}.$$

Тогда скалярное произведение векторов

$$\mathbf{ab} = (X_a\mathbf{i} + Y_a\mathbf{j} + Z_a\mathbf{k})\,(X_b\mathbf{i} + Y_b\mathbf{j} + Z_b\mathbf{k}). \tag{4.65}$$

Для упрощения выражения вычислим предварительно скалярные произведения ортов осей, т. е. величины

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i}^2 = 1, & \mathbf{ij} = 0, & \mathbf{ik} = 0, \\ \mathbf{ji} = 0, & \mathbf{j}^2 = 1, & \mathbf{jk} = 0, \\ \mathbf{ki} = 0, & \mathbf{kj} = 0, & \mathbf{k}^2 = 1. \end{array} \tag{4.66}$$

На основании свойства 3, раскрывая скобки в выражении (4.65), имеем

$$\mathbf{ab} = X_aX_b(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}) + Y_aY_b(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}) + Z_aZ_b(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}) + X_aY_b(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}) +$$
$$+ X_aZ_b(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}) + Y_aX_b(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}) + Y_aZ_b(\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}) + Z_aX_b(\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}) + Z_aY_b(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}).$$

Принимая во внимание соотношения (4.66), видим, что в правой части не равны нулю только первые три слагаемых. Окончательно получаем

$$\mathbf{ab} = X_aX_b + Y_aY_b + Z_aZ_b. \tag{4.67}$$

Итак, скалярное произведение двух векторов равно сумме попарных произведений их одноименных проекций.

Таким образом, необходимым и достаточным условием перпендикулярности векторов $\mathbf{a} = \{X_a;\ Y_a;\ Z_a\}$ и $\mathbf{b} = \{X_b;\ Y_b;\ Z_b\}$ является выполнение равенства

$$X_aX_b + Y_aY_b + Z_aZ_b = 0. \tag{4.68}$$

В самом деле, согласно свойству скалярного произведения векторов, векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ взаимно перпендикулярны в том и только в том случае, если $\mathbf{ab} = 0$. Но согласно равенству (4.67) имеем: $\mathbf{ab} = X_aX_b +$

$+Y_aY_b+Z_aZ_b$. Таким образом, векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ перпендикулярны только тогда, когда выполняется равенство (4.68).

Найдем угол φ между векторами $\mathbf{a}=\{X_a; Y_a; Z_a\}$ и $\mathbf{b}=\{X_b; Y_b; Z_b\}$. По определению скалярного произведения $\mathbf{ab}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi$, откуда

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}. \tag{4.69}$$

Переходя к проекциям, используя соотношение (4.67) и равенство (4.36), получаем

$$\cos\varphi=\frac{X_aX_b+Y_aY_b+Z_aZ_b}{\sqrt{X_a^2+Y_a^2+Z_a^2}\cdot\sqrt{X_b^2+Y_b^2+Z_b^2}}. \tag{4.70}$$

Пусть некоторая ось u составляет с координатными осями углы α, β, γ. Найдем проекцию произвольного вектора $\mathbf{a}=\{X; Y; Z\}$ на эту ось. Предположим, что направление оси u задано единичным вектором или ортом $\mathbf{e}$. Согласно соотношению (4.57) имеем

$$\mathbf{ea}=|\mathbf{e}|\,\mathrm{пр}_{\mathbf{e}}\,\mathbf{a}.$$

Поскольку $|\mathbf{e}|=1$ и $\mathrm{пр}_{\mathbf{e}}\,\mathbf{a}=\mathrm{пр}_u\mathbf{a}$, то $\mathrm{пр}_u\,\mathbf{a}=\mathbf{ea}$.

Орт $\mathbf{e}$ направлен по оси u, поэтому он составляет с осями координат те же углы α, β, γ, что и ось u. Следовательно,

$$\mathrm{пр}_x\,\mathbf{e}=|\mathbf{e}|\cos\alpha,\ \mathrm{пр}_y\,\mathbf{e}=|\mathbf{e}|\cos\beta,\ \mathrm{пр}_z\,\mathbf{e}=|\mathbf{e}|\cos\gamma.$$

Но, так как $|\mathbf{e}|=1$, то $\mathbf{e}=\{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$. Поскольку задан еще вектор $\mathbf{a}=\{X; Y; Z\}$, то, используя соотношение (4.67), находим проекцию вектора $\mathbf{a}$ на ось u:

$$\mathrm{пр}_u\,\mathbf{a}=\mathbf{ea}=X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma.$$

Пример 1. Два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ определены своими проекциями $\mathbf{a}=\{7; 2; -1\}$ и $\mathbf{b}=\{1; 2; -3\}$. Найти скалярное произведение этих векторов и угол между ними.

Решение. Согласно соотношению (4.67)

$$\mathbf{ab}=X_aX_b+Y_aY_b+Z_aZ_b.$$

Подставляя проекции данных векторов, получим

$$\mathbf{ab}=7\cdot1+2\cdot2+(-1)(-3)=14.$$

Для определения угла между векторами воспользуемся соотношением (4.70):

$$\cos\varphi=\frac{X_aX_b+Y_aY_b+Z_aZ_b}{\sqrt{X_a^2+Y_a^2+Z_a^2}\cdot\sqrt{X_b^2+Y_b^2+Z_b^2}}=\frac{14}{\sqrt{49+4+1}\cdot\sqrt{1+4+9}}=$$
$$=\frac{14}{7{,}348\cdot3{,}742}=\frac{14}{27{,}496}=0{,}509.$$

Искомый угол $\varphi=59°24'$.

Пример 2. Даны вершины треугольника A (3; 2; -3), B (5; 1; -1), C (1; -2; 1). Найти внутренний угол при вершине A.

Решение. Искомый угол φ есть угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, зная координаты их концов. Воспользуемся соотношениями (4.32), (4.33) и (4.34):

$$\overline{AB}=\{5-3;\ 1-2;\ -1+3\}=\{2;\ -1;\ 2\},$$

$$\overline{AC}=\{1-3;\ -2-2;\ 1+3\}=\{-2;\ -4;\ 4\}.$$

Используя соотношение (4.36), найдем модули векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$|\overline{AB}|=\sqrt{4+1+4}=3;$$

$$|\overline{AC}|=\sqrt{4+16+16}=6.$$

Согласно равенству (4.67), найдем скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}=2\cdot(-2)+(-1)\cdot(-4)+2\cdot 4=8.$$

На основании соотношения (4.69), получим

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|}=\frac{8}{3\cdot 6}=\frac{4}{9},$$

откуда $\varphi=\arccos\frac{4}{9}\approx 63°36'$.

Упражнения

1. Определить угол между векторами $\mathbf{a}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}$ и $\mathbf{b}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$.
Отв. $\varphi=135°$.

2. Определить углы треугольника ABC с вершинами $A(2;\ -1;\ 3)$, $B(1;\ 1;\ 1)$ и $C(0;\ 0;\ 5)$.
Отв. $\angle B=\angle C=45°$.

3. Известны модули векторов: $|\mathbf{a}|=3$, $|\mathbf{b}|=5$. Определить, при каком значении α векторы $\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$, $\mathbf{a}-\alpha\mathbf{b}$ будут взаимно перпендикулярны.
Отв. $\alpha=\pm\frac{3}{5}$.

4. Какому условию должны удовлетворять векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, чтобы вектор $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ был перпендикулярен к вектору $\mathbf{a}-\mathbf{b}$?
Отв. $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$.

5. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}$ и $\mathbf{b}=-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$.
Отв. $\varphi=90°$.

§ 15. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ И ЕГО СВОЙСТВА

Векторным произведением вектора $\mathbf{a}$ *на вектор* $\mathbf{b}$ называется такой третий вектор $\mathbf{c}$, длина которого равна $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\varphi$, где φ — угол между векторами, а направление перпендикулярно к плоскости параллелограмма, построенного на данных векторах, причем вектор $\mathbf{c}$ направлен так, что из его конца видно, что вращение от $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$ на наименьший угол происходит против часовой стрелки. Согласно определению длина вектора $\mathbf{c}$ равна площади параллелограмма, построенного на данных векторах (рис. 4.19).

Векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ обозначают либо с помощью квадратных скобок $[\mathbf{ab}]$, либо с помощью знака умножения $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Векторное произведение векторов обладает следующими свойствами.

Свойство 1. Векторное произведение $[\mathbf{ab}]$ равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны.

Доказательство. Пусть $[\mathbf{ab}] = 0$. Тогда длина вектора $\mathbf{c} = [\mathbf{ab}]$ также равна нулю. Но $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \varphi$. Это означает, что если $\mathbf{c} = 0$, то при $|\mathbf{a}| \neq 0$ и $|\mathbf{b}| \neq 0$ $\sin \varphi = 0$, откуда $\varphi = 0$, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ направлены в одну сторону, и $\varphi = 180°$, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ направлены в противоположные стороны. Следовательно, векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны.

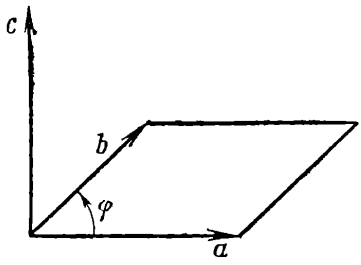

Рис. 4.19

Докажем обратное утверждение: если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ параллельны, то их векторное произведение равно нулю. Действительно, если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ параллельны, то угол φ между ними либо равен 0°, либо равен 180° и $\sin \varphi = 0$. Учитывая, что $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \varphi$, получаем $|\mathbf{c}| = 0$ и, следовательно, вектор $\mathbf{c} = 0$, т. е., векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равно нулю. Из этого свойства вытекает, что векторный квадрат вектора $\mathbf{a}$ равен нулю, т. е.

$$[\mathbf{aa}] = 0.$$

Свойство 2. При перестановке сомножителей векторное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ меняет направление на противоположное, т. е.

$$[\mathbf{ab}] = -[\mathbf{ba}], \tag{4.71}$$

Доказательство. Сравним векторы $\mathbf{c}_1 = [\mathbf{ab}]$ и $\mathbf{c}_2 = [\mathbf{ba}]$. Согласно определению длины векторов $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$ равны, так как площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, в точности равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$. Оба вектора $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$ направлены перпендикулярно к плоскости параллелограмма. Сравним направление векторов $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$ (рис. 4.20). Если смотреть из конца вектора $\mathbf{c}_1$, то, согласно определению, поворот вектора $\mathbf{a}$ к вектору $\mathbf{b}$ виден против часовой стрелки. Если же смотреть из конца вектора $\mathbf{c}_2$, то против часовой стрелки виден поворот вектора $\mathbf{b}$ к вектору $\mathbf{a}$. Следовательно, векторы $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{c}_2$ направлены противоположно, т. е. $\mathbf{c}_1 = -\mathbf{c}_2$ или $[\mathbf{ab}] = -[\mathbf{ba}]$.

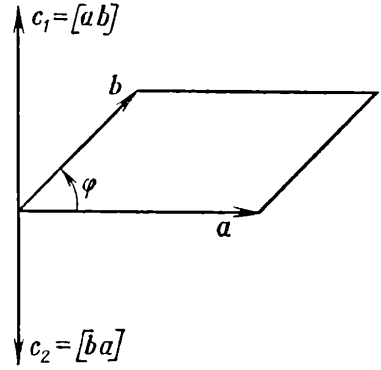

Рис. 4.20

Свойство 3. Векторное произведение обладает сочетательным свойством по отношению к скалярному множителю, т. е.

$$\lambda [\mathbf{ab}] = [(\lambda \mathbf{a})\, \mathbf{b}] \tag{4.72}$$

и

$$\lambda [\mathbf{ab}] = [\mathbf{a}\,(\lambda \mathbf{b})]. \tag{4.73}$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать только справедливость соотношения (4.72), так как соотношение (4.73) сводится к равенству (4.72) при помощи перестановки сомножителей векторных произведений в левой и правой частях с последующей заменой **b** на **a** и **a** на **b**. Соотношение (4.72) очевидно при $\lambda = 0$ или если коллинеарны векторы **a** и **b**, так как в этом случае левая и правая его части обращаются в нуль.

Рассмотрим случай, когда $\lambda \neq 0$ и векторы **a** и **b** не коллинеарны. Согласно определению векторного произведения имеем

$$|[\mathbf{ab}]| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin \varphi,$$

где φ — угол между векторами $|\mathbf{a}|$ и $|\mathbf{b}|$, следовательно,

$$|\lambda [\mathbf{ab}]| = |\lambda|\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin \varphi.$$

По определению векторного произведения

$$|[(\lambda \mathbf{a})\,\mathbf{b}]| = \lambda\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin \theta,$$

где θ — угол между векторами $\lambda \mathbf{a}$ и **b**. Но угол θ либо равен углу φ (при $\lambda > 0$), либо равен $\pi - \varphi$ (при $\lambda < 0$). Однако в том и в другом случае $\sin \varphi = \sin \theta$, т. е.

$$|\lambda\,(\mathbf{ab})| = |[(\lambda \mathbf{a})\,\mathbf{b}]|.$$

Далее, согласно определению векторного произведения, оба вектора $\lambda [\mathbf{ab}]$ и $[(\lambda \mathbf{a})\,\mathbf{b}]$ перпендикулярны к каждому из векторов **a** и **b**, т. е. векторы $\lambda [\mathbf{ab}]$ и $[\lambda\,(\mathbf{a})\,\mathbf{b}]$ коллинеарны друг к другу. Таким образом, векторы $\lambda [\mathbf{ab}]$ и $[(\lambda \mathbf{a})\,\mathbf{b}]$ имеют одинаковые модули и коллинеарны. Остается решить вопрос о направлении этих векторов. Пусть $\lambda > 0$. Тогда векторы $\lambda \mathbf{a}$ и **a** направлены одинаково. Поэтому векторы $[\mathbf{ab}]$ и $[(\lambda \mathbf{a})\,\mathbf{b}]$ направлены в одну сторону. Далее, вектор $\lambda [\mathbf{ab}]$ при $\lambda > 0$ направлен одинаково с вектором $[\mathbf{ab}]$. Следовательно, вектор $\lambda [\mathbf{ab}]$ направлен так же, как и вектор $[(\lambda \mathbf{a})\,\mathbf{b}]$, значит

$$\lambda [\mathbf{ab}] = [(\lambda \mathbf{a})\,\mathbf{b}].$$

Пусть $\lambda < 0$. Тогда векторы $\lambda \mathbf{a}$ и **a** направлены противоположно. Поэтому векторы $[\mathbf{ab}]$ и $[(\lambda \mathbf{a})\,\mathbf{b}]$ также направлены противоположно. Далее, вектор $\lambda [\mathbf{ab}]$ при $\lambda < 0$ направлен противоположно вектору $[\mathbf{ab}]$. Следовательно, векторы $\lambda [\mathbf{ab}]$ и $[(\lambda \mathbf{a})\,\mathbf{b}]$ направлены одинаково, т. е.

$$\lambda [\mathbf{ab}] = [(\lambda \mathbf{a})\,\mathbf{b}].$$

Итак, соотношение (4.72) справедливо всегда.

Свойство 4. Векторное произведение подчиняется распределительному закону, т. е.

$$[(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{c}] = [\mathbf{ac}] + [\mathbf{bc}] \tag{4.74}$$

и

$$[\mathbf{a}(\mathbf{b}+\mathbf{c})]=[\mathbf{ab}]+[\mathbf{ac}]. \tag{4.75}$$

Доказательство этого свойства здесь не приводится.

Найдем векторное произведение двух векторов, заданных своими проекциями. Пусть даны вектор $\mathbf{a}=\{X_a;\ Y_a;\ Z_a\}$ и вектор $\mathbf{b}=\{X_b;\ Y_b;\ Z_b\}$. Разложим векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ на составляющие:

$$\mathbf{a}=X_a\mathbf{i}+Y_a\mathbf{j}+Z_a\mathbf{k};\ \mathbf{b}=X_b\mathbf{i}+Y_b\mathbf{j}+Z_b\mathbf{k}.$$

Тогда векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

$$[\mathbf{ab}]=[(X_a\mathbf{i}+Y_a\mathbf{j}+Z_a\mathbf{k})(X_b\mathbf{i}+Y_b\mathbf{j}+Z_b\mathbf{k})]. \tag{4.76}$$

Для упрощения полученного выражения найдем векторные произведения ортов осей:

$$\begin{array}{lll}[\mathbf{ij}]=0, & [\mathbf{ij}]=\mathbf{k}, & [\mathbf{ik}]=-\mathbf{j},\\ [\mathbf{ji}]=-\mathbf{k}, & [\mathbf{jj}]=0, & [\mathbf{jk}]=\mathbf{i},\\ [\mathbf{ki}]=\mathbf{j}, & [\mathbf{kj}]=-\mathbf{i}, & [\mathbf{kk}]=0.\end{array} \tag{4.77}$$

Используя свойства векторного произведения и раскрывая скобки в выражении (4.76), получим

$$[\mathbf{ab}]=X_aX_b[\mathbf{ii}]+X_aX_b[\mathbf{ij}]+X_aZ_b[\mathbf{ik}]+Y_aX_b[\mathbf{ji}]+$$
$$+Y_aY_b[\mathbf{jj}]+Y_aZ_b[\mathbf{jk}]+Z_aX_b[\mathbf{ki}]+Z_aY_b[\mathbf{kj}]+Z_aZ_b[\mathbf{kk}].$$

Принимая во внимание соотношения (4.77), имеем

$$[\mathbf{ab}]=(Y_aZ_b-Y_bZ_a)\mathbf{i}-(X_aZ_b-X_bZ_a)\mathbf{j}+(X_aY_b-X_bY_a)\mathbf{k}$$

или

$$[\mathbf{ab}]=\begin{vmatrix}Y_a & Z_a\\ Y_b & Z_b\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}X_a & Z_a\\ X_b & Z_b\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}X_a & Y_a\\ X_b & Y_b\end{vmatrix}\mathbf{k}. \tag{4.78}$$

Коэффициенты полученного разложения представляют собой координаты вектора $[\mathbf{ab}]$, т. е.

$$[\mathbf{ab}]=\left\{\begin{vmatrix}Y_a & Z_a\\ Y_b & Z_b\end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix}X_a & Z_a\\ X_b & Z_b\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}X_aY_a\\ X_bY_b\end{vmatrix}\right\}. \tag{4.79}$$

Правую часть равенства (4.78) можно истолковать как разложение определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ X_a & Y_a & Z_a\\ X_b & Y_b & Z_b\end{vmatrix}$$

по элементам первой строки (см. § 5). Таким образом,

$$[\mathbf{ab}]=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ X_a & Y_a & Z_a\\ X_b & Y_b & Z_b\end{vmatrix}. \tag{4.80}$$

Пример 1. Найти векторное произведение векторов

$$\mathbf{a}=\{-3;\ -7;\ -7\}\ \text{и}\ \mathbf{b}=\{-6;\ 2;\ 3\}.$$

Решение. На основании равенства (4.78) имеем

$$[\mathbf{ab}]=\begin{vmatrix}-7 & -7\\ 2 & 3\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}-3 & -7\\ -6 & 3\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}-3 & -7\\ -6 & 2\end{vmatrix}\mathbf{k}$$

или

$$[\mathbf{ab}]=-7\mathbf{i}+51\mathbf{j}-48\mathbf{k}.$$

Пример 2. Найти площадь S треугольника с вершинами в точках $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ -3)$, $C(5;\ 2;\ 6)$.

Решение. Положим $\overline{AB}=\mathbf{a}$, $\overline{AC}=\mathbf{b}$. Тогда, согласно соотношениям (4.32), (4.33) и (4.34), находим $\mathbf{a}=\{2;\ -2;\ -3\}$, $\mathbf{b}=\{4;\ 0;\ 6\}$. Угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ обозначим через φ. Искомая площадь треугольника

$$S=\frac{1}{2}|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi,$$

или

$$S=\frac{1}{2}|[\mathbf{ab}]|.$$

На основании равенства (4.80) векторное произведение

$$[\mathbf{ab}]=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 0 & 6\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 0 & 6\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}\mathbf{k}=$$

$$=-12\mathbf{i}-24\mathbf{j}+8\mathbf{k}.$$

Длина вектора

$$|[\mathbf{ab}]|=\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}=28\ \text{ед. длины.}$$

Следовательно, площадь треугольника

$$S=\frac{1}{2}\cdot 28=14\ \text{кв. ед.}$$

Упражнения

1. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(7;\ 3;\ 4)$, $B(1;\ 0;\ 6)$ и $C(4;\ 5;\ -2)$.

Отв. $S=24{,}5$ кв. ед.

2. Построить параллелограмм на векторах $\mathbf{a}=2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ и $\mathbf{b}=\mathbf{i}+2\mathbf{k}$. Вычислить площадь и высоту параллелограмма.

Отв. $S=\sqrt{21}$ кв. ед., $h=\sqrt{4{,}2}$.

3. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Зная, что $|\mathbf{a}|=6$, $|\mathbf{b}|=5$, найти $|[\mathbf{ab}]|$.

Отв. $|[\mathbf{ab}]|=15$.

4. Дано: $|\mathbf{a}|=10$, $|\mathbf{b}|=2$ и $\mathbf{ab}=12$. Найти $|[\mathbf{ab}]|$.

Отв. $|[\mathbf{ab}]|=16$.

5. Дано: $|\mathbf{a}|=3$, $|\mathbf{b}|=26$ и $|[\mathbf{ab}]|=72$. Найти $\mathbf{ab}$.

Отв. $\mathbf{ab}=\pm 30$.

6. Определить диагонали и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}=\mathbf{k}-\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

Отв. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=\sqrt{5}$, $S=\sqrt{6}$ кв. ед.

§ 16. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ТРЕХ ВЕКТОРОВ

Пусть даны три вектора **a**, **b** и **c**. Найдем векторное произведение [**ab**] и умножим его скалярно на третий вектор **c**: [**ab**]**c**. В результате получим *векторно-скалярное* или *смешанное произведение трех векторов* **a**, **b** и **c**.

Если три вектора **a**, **b**, **c** лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях, то они называются *компланарными*. Выясним геометрический смысл величины [**ab**]**c**, для чего построим параллелепипед, сторонами которого являются векторы **a**, **b**, **c** (рис. 4.21). Построим векторное произведение [**ab**], которое обозначим через **d**. Тогда, согласно определению, [**ab**]**c**=**dc**. На основании соотношения (4.58) скалярное произведение можно выразить через проекции векторов: $\mathbf{dc}=|\mathbf{d}|\cdot \mathrm{пр}_{\mathbf{d}}\mathbf{c}$. Величина $|\mathbf{d}|=|[\mathbf{ab}]|$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**. Величина $\mathrm{пр}_{\mathbf{d}}\mathbf{c}$ равна (со знаком плюс или минус) высоте h построенного параллелепипеда. Отсюда следует, что смешанное произведение равно (со знаком плюс или минус) объему параллелепипеда, построенного на векторах **a**, **b** и **c**. Поскольку скалярное произведение вектора [**ab**] на вектор **c** дает объем параллелепипеда с положительным, а иногда с отрицательным знаком, то очевидно, что положительный знак получается, если угол между векторами **d** и **c** острый, и отрицательный, если он тупой. При остром угле между векторами **d** и **c**, если смотреть из конца вектора **c**, вращение вектора **a** к вектору **b** будет видно так же, как из конца вектора **d**, т. е. в положительном направлении (против часовой стрелки). При тупом угле между векторами **d** и **c**, если смотреть из конца вектора **c**, вращение вектора **a** к вектору **b** будет видно в отрицательном направлении (по часовой стрелке). Иными словами, смешанное произведение положительно, если векторы **a**, **b** и **c** образуют систему, одноименную с основной (*Oxyz*), и отрицательно, если эти векторы образуют систему, разноименную с основной.

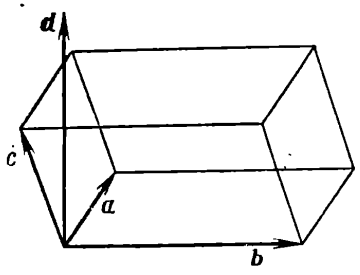

Рис. 4.21

Таким образом, смешанное произведение трех векторов **a**, **b** и **c** есть число, равное объему параллелепипеда, построенного на векторах **a**, **b** и **c**, как на ребрах, взятому со знаком плюс, если векторы **a**, **b**, **c** образуют систему, одноименную с основной, и со знаком минус, если разноименную, т. е.

$$[\mathbf{ab}]\,\mathbf{c}=\pm v. \tag{4.81}$$

Отсюда абсолютная величина произведения $[\mathbf{ab}]\mathbf{c}$ останется той же, в каком бы порядке ни брать сомножители $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, т. е.

$$[\mathbf{ab}]\mathbf{c} = \mathbf{a}[\mathbf{bc}]. \tag{4.82}$$

Действительно, так как в скалярном произведении можно переставлять сомножители (свойство 1, § 14), то

$$\mathbf{a}[\mathbf{bc}] = [\mathbf{bc}]\mathbf{a}. \tag{4.83}$$

Далее, согласно равенству (4.81), имеем

$$[\mathbf{ab}]\mathbf{c} = \pm \mathbf{v}, \quad [\mathbf{bc}]\mathbf{a} = \pm \mathbf{v}. \tag{4.84}$$

Знак в правой части равенства (4.83) в одних случаях будет положительным, а в других — отрицательным. Это зависит от того, образуют три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, взятые в определенном порядке, систему, одноименную с основной, или нет. Заметим, что оси координат расположены так, что они следуют одна за другой против часовой стрелки, если смотреть во внутреннюю часть трехгранного угла (рис. 4.22). Порядок следования не нарушится, если начать обход со второй оси или с третьей, лишь бы он совершался в том же направлении, т. е. против часовой стрелки. При этом множители переставятся в круговом порядке.

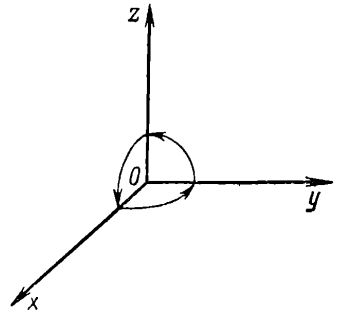

Рис. 4.22

Таким образом, на основании равенств (4.84) имеем

$$[\mathbf{ab}]\mathbf{c} = [\mathbf{bc}]\mathbf{a}.$$

Отсюда, учитывая равенство (4.83), получаем

$$[\mathbf{ab}]\mathbf{c} = \mathbf{a}[\mathbf{bc}],$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, учитывая равенство (4.82), в дальнейшем смешанное произведение векторов можно обозначать символом $\mathbf{abc}$. Из равенства (4.81) следует, что смешанное произведение векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях, т. е. если эти векторы компланарны. Таким образом, равенство

$$[\mathbf{ab}]\mathbf{c} = 0 \tag{4.85}$$

есть условие компланарности векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

Перейдем к вычислению смешанного произведения векторов, проекции которых даны:

$$\mathbf{a} = \{X_a;\ Y_a;\ Z_a\},\ \mathbf{b} = \{X_b;\ Y_b;\ Z_b\},\ \mathbf{c} = \{X_c;\ Y_c;\ Z_c\}.$$

Согласно определению векторного произведения найдем сначала проекции вектора $[\mathbf{ab}]$:

$$[\mathbf{ab}]=\left\{\begin{vmatrix} Y_a & Z_a \\ Y_b & Z_b \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} X_a & Z_a \\ X_b & Z_b \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} X_a & Y_a \\ X_b & Y_b \end{vmatrix}\right\}.$$

Умножая скалярно вектор $[\mathbf{ab}]$ на вектор $\mathbf{c}$ (по формуле (4.58), получим

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix} Y_a & Z_a \\ Y_b & Z_b \end{vmatrix}X_c-\begin{vmatrix} X_a & Z_a \\ X_b & Z_b \end{vmatrix}Y_c+\begin{vmatrix} X_a & Y_a \\ X_b & Y_b \end{vmatrix}Z_c,$$

или

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix} X_a & Y_a & Z_a \\ X_b & Y_b & Z_b \\ X_c & Y_c & Z_c \end{vmatrix}. \tag{4.86}$$

Из равенства (4.86) следует, что если векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ заданы своими координатами:

$$\mathbf{a}=\{X_a;\ Y_a;\ Z_a\},\ \mathbf{b}=\{X_b;\ Y_b;\ Z_b\},\ \mathbf{c}=\{X_c;\ Y_c;\ Z_c\},$$

то необходимым и достаточным условием компланарности этих векторов является равенство нулю определителя третьего порядка, составленного из координат этих векторов, т. е.

$$\begin{vmatrix} X_a & Y_a & Z_a \\ X_b & Y_b & Z_b \\ X_c & Y_c & Z_c \end{vmatrix}=0. \tag{4.87}$$

Пример 1. Найти объем треугольной пирамиды, если координаты ее вершин

$$A_1(x_1;\ y_1;\ z_1),\ A_2(x_2;\ y_2;\ z_2),\ A_3(x_3;\ y_3;\ z_3),\ A_4(x_4;\ y_4;\ z_4).$$

Решение. Объем треугольной пирамиды равен одной шестой объема параллелепипеда со сторонами $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$. Пользуясь соотношениями (4.32), (4.33) и (4.34), найдем проекции этих векторов на оси координат:

$$\overline{A_1A_2}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\},$$
$$\overline{A_1A_3}=\{x_3-x_1;\ y_3-y_1;\ z_3-z_1\},$$
$$\overline{A_1A_4}=\{x_4-x_1;\ y_4-y_1;\ z_4-z_1\}.$$

Следовательно,

$$V_{\text{пир}}=\pm\frac{1}{6}\,\overline{A_1A_2}\,\overline{A_1A_3}\,\overline{A_1A_4}$$

или, согласно равенству (4.86),

$$V_{\text{пир}}=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}.$$

При вычислении объема знак в равенстве выбирают одинаковый со знаком определителя.

Пример 2. Доказать, что векторы $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+7\mathbf{k}$ компланарны.

Решение. Используя равенство (4.86), найдем смешанное произведение векторов:

$$\mathbf{abc}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & -4 & 7\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2 & -3\\ -4 & 7\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 7\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot 2+1\cdot 16+2\cdot(-10)=0.$$

Данный определитель третьего порядка вычислен разложением по элементам первой строки. Так как $\mathbf{abc}=0$, то на основании соотношения (4.87) можно сделать вывод: данные векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — компланарны.

Упражнения

1. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=-3\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=2\mathbf{j}+5\mathbf{k}$.

Отв. $V=51$ куб. ед.

2. Построить пирамиду с вершинами $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(5;\ 2;\ 0)$. $B(2;\ 5;\ 0)$ и $C(1;\ 2;\ 4)$. Вычислить объем, площадь грани ABC и высоту пирамиды, опущенную на эту грань.

Отв. $V=14$ куб. ед., $H=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$ лин. ед.

3. Показать, что точки $A(2;\ -1;\ -2)$, $B(1;\ 2;\ 1)$, $C(2;\ 3;\ 0)$ и $D(5;\ 0;\ 6)$ лежат в одной плоскости.

4. Показать, что векторы $\mathbf{a}=-\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-4\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=-3\mathbf{i}+12\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ компланарны.

5. Найти объем тетраэдра с вершинами в точках $A(2;\ -1;\ 1)$, $B(5;\ 5;\ 4)$, $C(3;\ 2;\ -1)$ и $D(4;\ 1;\ 3)$.

Отв. $V=3$ куб. ед.

ГЛАВА V

ПЛОСКОСТЬ И ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. ПОНЯТИЕ ОБ УРАВНЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ

Если в пространстве задана поверхность как геометрическое место точек, удовлетворяющих какому-нибудь условию, то это условие можно записать в виде соотношения, связывающего координаты всех точек пространства, т. е. в виде уравнения относительно координат x, y, z. Это уравнение в общем виде записывается так:

$$F(x, y, z) = 0. \tag{5.1}$$

Уравнением поверхности называется такое уравнение с тремя переменными, которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на этой поверхности.

Такое определение уравнения поверхности дает возможность исследовать поверхности при помощи анализа их уравнений. Уравнение вида (5.1) в некоторых случаях может определять также линию, точку или не определять даже точки. Так, например, уравнению $x^2+y^2+z^2=0$ удовлетворяют координаты только точки $O(0; 0; 0)$, а уравнению $x^2+y^2+z^2+1=0$ не удовлетворяют координаты никаких точек пространства. В этих случаях имеет место вырождение уравнения поверхности. Таким образом, система прямоугольных координат в пространстве дает возможность поставить две задачи:

1. Дана поверхность как геометрическое место точек и требуется найти ее уравнение.

2. Дано уравнение $F(x, y, z)=0$ и необходимо найти поверхность, определяемую этим уравнением.

Рассмотрим несколько простейших примеров составления уравнений заданных поверхностей.

Пример 1. Найти уравнение плоскости, делящей пополам отрезок, соединяющий точки $O(0; 0; 0)$ и $A(1; 2; 3)$, и перпендикулярной этому отрезку.

Решение. Пусть $M(x; y; z)$ — любая точка плоскости. Очевидно, что искомая плоскость есть геометрическое место точек, равноудаленных от точек O и A. Поэтому для точки M справедливо равенство

$$|\overline{MO}| = |\overline{MA}|.$$

По формуле расстояния между двумя точками имеем

$$|\overline{MO}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$|\overline{MA}| = \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}.$$

Приравнивая эти расстояния, получим

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}.$$

Возводя в квадрат обе стороны равенства, находим

$$2x+4y+6y+6z-14=0,$$

или

$$x+2y+3z-7=0.$$

Последнее уравнение и является искомым уравнением плоскости.

Пример 2. Найти уравнение шаровой поверхности (сферы), которая является геометрическим местом точек, удаленных от точки $A(a;\ b;\ c)$, называемой центром, на расстояние, равное радиусу R.

Р е ш е н и е. Пусть $M(x;\ y;\ z)$—любая точка данной сферы. Согласно условию $|\overline{AM}|=R$. Определим $|\overline{AM}|$ как расстояние между двумя точками A и M и приравняем его R:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=R.$$

Отсюда находим уравнение сферы:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \tag{5.2}$$

Уравнение сферы с центром в начале координат ($a=b=c=0$) имеет вид

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \tag{5.3}$$

Рассмотрим уравнение $z-x^2=0$. Только в плоскости xOz это уравнение является уравнением параболы $z=x^2$. Если же это уравнение рассматривать в пространстве, то, как нетрудно заметить, получается уравнение цилиндрической поверхности (рис. 5.1), направляющей которой служит парабола $z=x^2$, а образующие параллельны оси Oy. Это параболический цилиндр. Действительно, рассматриваемой поверхности принадлежат точки (2; 5; 4), (2; —8; 4) и, вообще, все точки с координатами (2; y; 4) (y—произвольно), так как эти координаты удовлетворяют рассматриваемому уравнению, не содержащему y. Аналогично, любое уравнение вида $F(x,\ z)=0$ определяет в пространстве уравнение некоторой цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oy, и направляющей в плоскости xOz с тем же уравнением $F(x,\ z)=0$. Уравнения $F(x,\ y)=0$ и $F(y,\ z)=0$ определяют цилиндрические

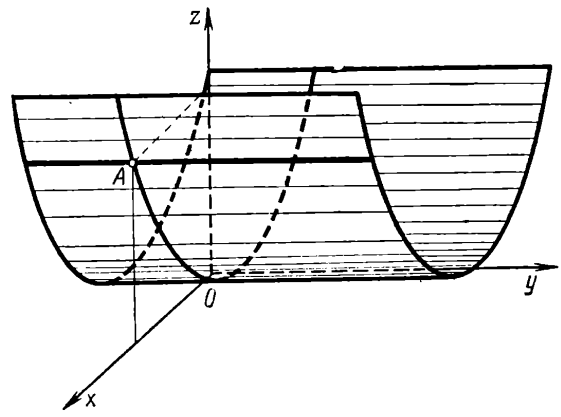

Рис. 5.1

поверхности с образующими, параллельными соответственно оси Oz и оси Ox. Например, уравнение $x^2+y^2=R^2$ определяет прямой круговой цилиндр радиуса R с осью Oz, в то время как это же уравнение в плоскости xOy определяет окружность.

§ 2. ПЛОСКОСТЬ (ПОВЕРХНОСТЬ ПЕРВОГО ПОРЯДКА)

Пусть задана прямоугольная система координат в пространстве. Рассмотрим произвольную плоскость α. На плоскости α возьмем фиксированную точку $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, выберем произвольный вектор, перпендикулярный к этой плоскости, и обозначим его через $\mathbf{n}$, а его проекции на оси координат буквами A, B, C, т. е. $\mathbf{n}=\{A;\ B;\ C\}$. Такой вектор, не равный нулю и перпендикулярный к некоторой плоскости, называется *нормальным*.

Пусть $M(x;\ y;\ z)$ — произвольная точка, которая лежит на плоскости α только тогда, когда вектор $\overline{M_1M}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{n}$, т. е. условием нахождения точки M на плоскости α является

$$\overline{M_1M} \perp \mathbf{n}. \tag{5.4}$$

Если условие (5.4) выразить через координаты x, y, z, то получим уравнение плоскости α. Согласно соотношениям (4.32), (4.33) и (4.34) имеем

$$\overline{M_1M}=\{x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1\}.$$

По условию $\mathbf{n}=\{A,\ B,\ C\}$. Известно, что два вектора взаимно перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю. Поэтому, учитывая равенство (4.67), находим

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \tag{5.5}$$

Это и есть искомое уравнение плоскости α. Уравнение (5.5) определяет уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и имеет нормальный вектор $\mathbf{n}=\{A;\ B;\ C\}$. Раскроем скобки в уравнении (5.5):

$$Ax+By+Cz+(-Ax_1-By_1-Cz_1)=0.$$

Обозначая $-Ax_1-By_1-Cz_1=D$, получим

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{5.6}$$

Уравнение вида (5.6) называется *общим уравнением плоскости*.

Таким образом, в прямоугольной системе координат каждая плоскость определяется уравнением первой степени и, наоборот: в прямоугольных координатах каждое уравнение первой степени определяет плоскость. Действительно, пусть дано произвольное уравнение первой степени (5.6). Очевидно, что коэффициенты A, B, C не могут быть одновременно равны нулю. Покажем, что уравнение (5.6) есть уравнение некоторой плоскости. Пусть точка $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ лежит на этой плоскости, т. е. числа x_1, y_1, z_1

являются решением уравнения (5.6). Это значит, что при подстановке этих чисел в уравнение (5.6) оно обращается в тождество

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \equiv 0. \tag{5.7}$$

Вычитая из уравнения (5.6) тождество (5.7), приходим к уравнению

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0,$$

которое в точности совпадает с уравнением (5.5) плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и имеющей нормальный вектор $\mathbf{n}\{A; B; C\}$. Но уравнение (5.5) равносильно уравнению (5.6). Следовательно, уравнение (5.6) является уравнением плоскости.

Поверхности, которые в прямоугольных координатах определяются уравнениями первой степени, называются *поверхностями первого порядка*. Таким образом, каждая плоскость есть поверхность первого порядка и, наоборот, каждая поверхность первого порядка есть плоскость.

Пусть даны два уравнения

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{*}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \tag{**}$$

которые определяют одну и ту же плоскость. Выясним, в каком соотношении находятся в этом случае их коэффициенты. Если уравнения (*) и (**) определяют одну и ту же плоскость, то их нормальные векторы $\mathbf{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ и $\mathbf{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ коллинеарны, так как они перпендикулярны к одной плоскости. Согласно условию (4.53) координаты этих векторов пропорциональны. Обозначим коэффициент пропорциональности через λ. Тогда

$$A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad C_2 = \lambda C_1.$$

Пусть $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — любая точка плоскости. Очевидно, что ее координаты должны удовлетворять каждому из уравнений

$$\begin{aligned} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 &= 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 &= 0. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Умножим первое из равенств на λ и вычтем из второго; в результате получим $D_2 - \lambda D_1 = 0$. Следовательно, $D_2 = \lambda D_1$. Таким образом,

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1} = \lambda. \tag{5.9}$$

Если два уравнения определяют одну и ту же плоскость, то их коэффициенты пропорциональны.

Пример 1. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2; 1; -1)$ и имеет нормальный вектор $\mathbf{n} = \{1; -2; 3\}$.

Решение. Воспользуемся равенством (5.5):

$$1(x - 2) + (-2)(y - 1) + 3(z + 1) = 0.$$

Искомое уравнение плоскости имеет вид

$$x - 2y + 3z + 3 = 0.$$

Пример 2. Точка $P(2; -1; 2)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Найти уравнение плоскости.

Решение. По условию радиус-вектор $\overline{OP}$ перпендикулярен плоскости, а его координаты равны координатам точки P (см. § 8 гл. 4), т. е.

$$\overline{OP} = \{2; -1; 2\}.$$

Таким образом, известен нормальный вектор $\overline{OP} = \{2; -1; 2\}$ плоскости и точка $P = (2; -1; 2)$, лежащая на ней. Воспользовавшись равенством (5.5), находим

$$2(x-2) - 1(y+1) + 2(z-2) = 0.$$

Искомое уравнение плоскости имеет вид $2x - y + 2z - 9 = 0$.

Исследуем общее уравнение плоскости. Известно, что каждое уравнение первой степени $Ax + By + Cz + D = 0$ определяет плоскость. Рассмотрим частные случаи уравнения первой степени.

1. Пусть $D = 0$. Тогда уравнение принимает вид $Ax + By + Cz = 0$. Числа $x = y = z = 0$ удовлетворяют уравнению. Следовательно, плоскость проходит через начало координат.

2. Пусть $C = 0$. Тогда уравнение принимает вид $Ax + By + D = 0$. В плоскости xOy это уравнение прямой, а в пространстве (при любом z) — геометрическое место точек, которые проектируются на плоскость xOy в виде прямой, т. е. плоскость, параллельная оси Oz.

3. Пусть $B = 0$ и $C = 0$. Тогда уравнение принимает вид $Ax + D = 0$. В плоскости xOy это уравнение прямой, параллельной оси Oy, а в пространстве (при любом y и z) геометрическое место точек, которые проектируются на плоскость xOy в виде прямой, параллельной оси Oy, т. е. плоскость, параллельная координатной плоскости yOz. В частном случае при $D = 0$ уравнение принимает вид $Ax = 0$ и рассматриваемая плоскость совпадает с координатной плоскостью yOz. Таким образом, уравнение $Ax = 0$ или $x = 0$ определяет плоскость yOz.

Аналогично получаем:

4. При $B = 0$ — плоскость, параллельную оси Oy.
5. При $A = 0$ — плоскость, параллельную оси Ox.
6. При $A = C = 0$ — плоскость, параллельную плоскости xOz.
7. При $A = B = 0$ — плоскость, параллельную плоскости xOy.
8. При $A = D = 0$ — плоскость, проходящую через ось Ox.
9. При $B = D = 0$ — плоскость, проходящую через ось Oy.
10. При $C = D = 0$ — плоскость, проходящую через ось Oz.
11. При $A = B = D = 0$ — плоскость xOy.
12. При $A = C = D = 0$ — плоскость xOz.

Упражнения

1. Даны точки $A(0; -1; 3)$ и $B(1; 3; 5)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A и перпендикулярной к вектору $\mathbf{n} = \overline{AB}$.

Отв. $x + 4y - 2z = 2$.

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и через точку $A(1; -1; 3)$.

Отв. $3y + z = 0$.

3. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку $B(2; 1; -1)$.

Отв. $x + 2z = 0$.

4. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $C(4; -4; 2)$ и параллельной плоскости xOz.

Отв. $y + 4 = 0$.

5. Через точку $N(-1; 2; 3)$ проведена плоскость, перпендикулярная к ON. Найти уравнение, определяющее плоскость.

Отв. $x - 2y - 3z + 14 = 0$.

6. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку A и имеющей нормальный вектор $\mathbf{n} = \{1; -2; 3\}$.

Отв. $x - 2y + 3z + 3 = 0$.

§ 3. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ В ОТРЕЗКАХ

Пусть плоскость пересекает оси Ox, Oy, Oz и не проходит через начало координат. Уравнение этой плоскости можно записать в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (5.10)$$

где ни один из коэффициентов A, B, C, D не равен нулю. Положение этой плоскости в пространстве будет вполне определено заданием трех отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат. Обозначим величины этих отрезков буквами a, b, c. Тогда данная плоскость проходит обязательно через точки $M(a; 0; 0)$, $N(0; b; 0)$ и $P(0; 0; c)$ (рис. 5.2). Подставим координаты точек M, N, P в уравнение (5.10):

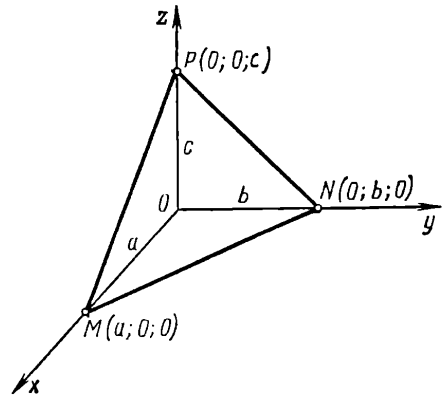

Рис. 5.2

$$Aa + D = 0, \; Bb + D = 0, \; Cc + D = 0.$$

Из этих уравнений найдем коэффициенты уравнения (5.10):

$$A = -\frac{D}{a}; \; B = -\frac{D}{b}; \; C = -\frac{D}{c}.$$

Подставляя найденные коэффициенты A, B, C в уравнение (5.10), имеем

$$-D\frac{x}{a} - D\frac{y}{b} - D\frac{z}{c} + D = 0.$$

Учитывая, что $D \neq 0$, разделим последнее уравнение на этот коэффициент, тогда

$$-\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} + 1 = 0$$

или

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (5.11)$$

Уравнение (5.11) называется *уравнением плоскости в отрезках*.

Пример 1. Плоскость проходит через точку $P(3;\ -8;\ -4)$ и отсекает на оси абсцисс отрезок $a=-3$, на оси аппликат отрезок $c=2$. Составить уравнение плоскости.

Решение. Воспользуемся уравнением плоскости в отрезках. По условию $a=-3$, $c=2$, поэтому

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{b}+\frac{z}{2}=1.$$

Точка P лежит на плоскости, т. е. ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости

$$\frac{3}{-3}-\frac{8}{b}+\frac{-4}{2}=1,$$

откуда $b=-2$. Следовательно, искомое уравнение плоскости имеет вид

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{2}=1.$$

Упражнения

1. Найти отрезки, отсекаемые плоскостью $3x-4y-24z+12=0$ на координатных осях.

Отв. $a=-4$; $b=3$; $c=1/2$.

2. Плоскость проходит через точку $M(6;\ -10;\ 1)$, отсекает на оси абсцисс отрезок $a=-3$, а на оси аппликат — отрезок $c=2$. Найти уравнение плоскости.

Отв. $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{2}=1$.

3. Найти уравнение плоскости, отсекающей на оси Oz отрезок $c=-5$ и перпендикулярной к вектору $\mathbf{n}=\{-2;\ 1;\ 3\}$.

Отв. $2x-y-3z-15=0$.

4. Найти уравнение плоскости, параллельной вектору $\mathbf{n}=\{2;\ 1;\ -1\}$ и отсекающей на координатных осях Ox и Oy отрезки $a=3$ и $b=-2$.

Отв. $2x-3y+z-6=0$.

5. Дано уравнение плоскости $x-4y+3z-2=0$. Записать это уравнение плоскости в отрезках.

Отв. $\frac{x}{2}+\frac{y}{-\frac{1}{2}}+\frac{z}{\frac{2}{3}}=1$.

§ 4. НОРМАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ. РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

Выведем другую форму уравнения плоскости в пространстве. Для этого проведем из начала координат O нормаль $\mathbf{n}$ к данной плоскости. Буквой N обозначим точку, в которой нормаль $\mathbf{n}$ пересекает плоскость (рис. 5.3). Положим, что углы между нормалью $\mathbf{n}$ и осями Ox, Oy, Oz соответственно равны α, β, γ. Длину отрезка $\overline{ON}$, т. е. расстояние плоскости от начала координат, обозначим

через p. Считаем, что известны значения $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ и p. Возьмем на плоскости произвольную точку M с координатами x; y; z. Очевидно, что проекция вектора $\overline{OM}$ на нормаль $\mathbf{n}$ равна p:

$$\text{пр}_{\mathbf{n}}\,\overline{OM} = p. \tag{5.12}$$

Также очевидно, что $\overline{OM} = \{x;\ y;\ z\}$. Таким образом, согласно равенству (4.71) имеем

$$\text{пр}_{\mathbf{n}}\,\overline{OM} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma. \tag{5.13}$$

Сопоставляя равенства (5.12) и (5.13), получаем

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p,$$

или

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \tag{5.14}$$

Это и есть уравнение данной плоскости, так как ему удовлетворяют координаты точки M, лежащей на плоскости. Уравнение плоскости (5.14) называется *нормальным уравнением плоскости в координатной форме*, а $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами нормали*. Пусть P — произвольная точка пространства с координатами x_p; y_p; z_p, не лежащая на данной плоскости. Найдем расстояние d от точки P до заданной плоскости (рис. 5.3). Отклонением δ точки P от данной плоскости назовем число $+d$, если точка лежит по ту сторону от плоскости, куда направлена нормаль $\mathbf{n}$, и число $-d$, если точка P лежит по другую сторону от плоскости.

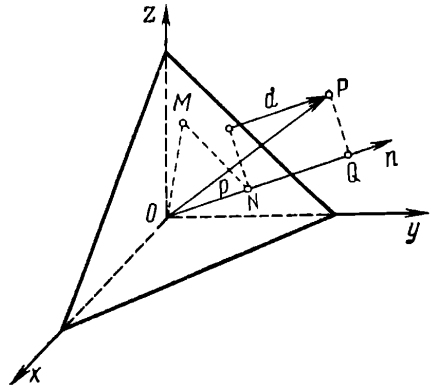

Рис. 5.3

Таким образом, отклонение $\delta = \pm d$. Иначе говоря, $\delta = +d$, если точка P и начало координат лежат по разные стороны от плоскости, и $\delta = -d$, если точка P и начало координат лежат по одну сторону от плоскости. Если точка P лежит на плоскости, то в этом случае отклонение $\delta = 0$.

Спроектируем точку P на нормаль $\mathbf{n}$ и обозначим проекцию через Q. Тогда $\delta = NQ = OQ - ON$, где NQ, OQ и ON — величины направленных отрезков $\overline{NQ}$, $\overline{OQ}$ и $\overline{ON}$. Но $OQ = \text{пр}_n\,\overline{OP}$, $ON = p$, следовательно,

$$\delta = \text{пр}_n\,\overline{OP} - p. \tag{5.15}$$

Согласно равенству (4.71) имеем

$$\text{пр}_n\,\overline{OP} = x_p\cos\alpha + y_p\cos\beta + z_p\cos\gamma. \tag{5.16}$$

Сопоставляя равенства (5.15) и (5.16), находим

$$\delta = x_p\cos\alpha + y_p\cos\beta + z_p\cos\gamma - p. \tag{5.17}$$

Таким образом, чтобы найти отклонение δ произвольной точки P от заданной плоскости, нужно подставить в левую часть нормального уравнения плоскости вместо текущих координат координаты точки P. Очевидно, что расстояние точки P от заданной плоскости равно абсолютной величине отклонения точки P от плоскости.

Покажем, что любое уравнение плоскости может быть приведено к нормальному виду. Пусть дано общее уравнение плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{5.18}$$

и ее нормальное уравнение

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0. \tag{5.19}$$

Уравнения (5.18) и (5.19) определяют одну и ту же плоскость и, следовательно, согласно условию (5.9), коэффициенты их пропорциональны, т. е.

$$\frac{\cos\alpha}{A}=\frac{\cos\beta}{B}=\frac{\cos\gamma}{C}=\frac{-p}{D}=\mu,$$

или

$$\mu A=\cos\alpha,\ \mu B=\cos\beta,\ \mu C=\cos\gamma,\ \mu D=-p. \tag{5.20}$$

Для нахождения множителя μ возведем первые три из равенств (5.20) в квадрат и сложим. В результате получим

$$\mu^2(A^2+B^2+C^2)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma.$$

Известно, что

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

следовательно,

$$\mu^2(A^2+B^2+C^2)=1,$$

или

$$\mu^2=\frac{1}{A^2+B^2+C^2},$$

откуда

$$\mu=\frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{5.21}$$

Число μ называется *нормирующим множителем*. В соотношении (5.21) знак нормирующего множителя берется противоположным знаку свободного члена общего уравнения плоскости (это следует из четвертого равенства (5.20)). При $D=0$ знак μ можно брать произвольным. Итак, любое уравнение плоскости может быть приведено к нормальному виду путем умножения его на нормирующий множитель μ, определяемый соотношением (5.21).

Пример 1. Привести к нормальному виду уравнение плоскости $3x-6y+2z+14=0$. Определить расстояние данной плоскости от начала координат.

Решение. Как следует из соотношения (5.21), нормирующий множитель

$$\mu=-\frac{1}{\sqrt{9+36+4}}=-\frac{1}{7}.$$

Умножая на μ данное уравнение, получаем нормальный вид уравнения плоскости:

$$-\frac{3}{7}x+\frac{6}{7}y-\frac{2}{7}z-2=0.$$

Отсюда видно, что расстояние плоскости от начала координат $p=2$.

Пример 2. Дана плоскость $7x-6y-6z+42=0$ и точка $A(2;\ 3;\ -1)$. Найти отклонение точки A от заданной плоскости.

Решение. Приведем данное уравнение к нормальному виду. Согласно соотношению (5.21) нормирующий множитель

$$\mu=-\frac{1}{\sqrt{49+36+36}}=-\frac{1}{11}.$$

Умножая данное уравнение на μ, получим искомое нормальное уравнение плоскости:

$$-\frac{7}{11}x+\frac{6}{11}y+\frac{6}{11}z-\frac{42}{11}=0.$$

Подставляя в левую часть этого уравнения координаты точки A, находим

$$\delta=-\frac{7}{11}\cdot 2+\frac{6}{11}\cdot 3+\frac{6}{11}\cdot(-1)-\frac{42}{11}=-4.$$

Итак, точка A имеет отрицательное отклонение от данной плоскости и удалена от нее на расстояние $d=4$.

Упражнения

1. Привести к нормальному виду уравнение плоскости $6x-6y-7z+33=0$. Найти ее расстояние от начала координат.

Отв. $-\frac{6}{11}x+\frac{5}{11}y+\frac{7}{11}z-3=0;\quad p=3.$

2. Найти расстояние от точки $A\ (2;\ -1;\ -1)$ до плоскости $16x-12y+15z-4=0$.

Отв. 1 ед.

3. На оси Oz найти точку, расстояние которой до плоскости $2x+3y-6z+4=0$ равно 2.

Отв. $A\left(0;\ 0;\ -\frac{5}{3}\right)$ или $B=(0;\ 0;\ 3)$.

4. Найти уравнения плоскостей, параллельных плоскости $x-2y+2z-2=0$ и отстоящих от нее на расстоянии $d=\frac{1}{3}$.

Отв. $x-2y+2z-1=0,\ x-2y+2z-3=0.$

5. На оси Oy найти точку, равноудаленную от точки $A\ (2;\ 0;\ 1)$ и плоскости $x+2y+2z-5=0$.

Отв. $B\ (0;\ -2;\ 0)$.

6. Найти расстояние между параллельными плоскостями $4x+3y-5z-8=0$ и $4x+3y-5z+12=0$.

Отв. $2\sqrt{2}$ ед.

§ 5. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ, ПРОХОДЯЩЕЙ ЧЕРЕЗ ОДНУ И ТРИ ДАННЫЕ ТОЧКИ

Найдем уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$. Пусть искомое уравнение имеет вид

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (5.22)$$

Так как по условию искомая плоскость проходит через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, то уравнению (5.22) удовлетворяют координаты этой точки, т. е.

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \tag{5.23}$$

Вычитая из уравнения (5.22) равенство (5.23), находим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{5.24}$$

Это уравнение плоскости, проходящей через данную точку M_0. Если коэффициенты A, B, C произвольны, то можно провести бесчисленное множество таких плоскостей, т. е. получаем *связку плоскостей*.

Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $N(4; -3; -1)$.

Решение. Воспользуемся соотношением (5.24). Уравнение искомой плоскости имеет вид

$$A(x - 4) + B(y + 3) + C(z + 1) = 0.$$

Аналогично, через две данные точки можно провести множество плоскостей — связку, так как для определения плоскости требуется задание трех точек. Пусть даны три точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой. Составим уравнение единственной плоскости, проходящей через эти точки. Обозначим через x, y, z координаты произвольной точки M. Рассмотрим три вектора:

$$\overline{AM} = \{x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1\},$$
$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\},$$
$$\overline{AC} = \{x_3 - x_1,\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1\}.$$

Очевидно, что точка M лежит на плоскости ABC только в том случае, когда векторы $\overline{AM}$, $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ компланарны. Условием компланарности трех векторов является равенство нулю определителя третьего порядка, составленного из их координат. Таким образом, искомое уравнение плоскости, проходящей через три данные точки, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{5.25}$$

Пример 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; 2; -1)$; $M_2(-1; 0; 4)$; $M_3(-2; -1; 1)$.

Решение. На основании равенства (5.25) уравнение искомой плоскости имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z + 1 \\ -1 - 1 & 0 - 2 & 4 + 1 \\ -2 - 1 & -1 - 2 & 1 + 1 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -2 & -2 & 5 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель, получим

$$-4(x-1)-15(y-2)+6(z+1)+15(x-1)+4(y-2)-6(z+1)=0.$$

Раскрывая скобки, приводя члены и сокращая на 11, находим искомое уравнение плоскости: $x-y+1=0$.

Упражнения

1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1; -1; 2)$; $B(2; 1; 2)$; $C(1; 1; 4)$.
Отв. $2x-y+z-5=0$.
2. Найти расстояние точки $(4; 3; 0)$ до плоскости, проходящей через точки $M(1; 3; 0)$; $N(4; -1; 2)$ и $P(3; 0; 1)$.
Отв. $\sqrt{6}$ ед.
3. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A\left(1; -2; -\frac{1}{2}\right)$; $B(2; 1; 3)$ и $C(0; -1; -1)$.
Отв. $5x+3y-4z-1=0$.
4. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1; -3; 4)$; $N(0; -2; -1)$ и $P(1; 1; -1)$.
Отв. $15x-5y-4z-14=0$.

§ 6. УГОЛ МЕЖДУ ПЛОСКОСТЯМИ. УСЛОВИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПЛОСКОСТЕЙ

Пусть две плоскости заданы уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

и образуют угол ψ. Определим угол ψ. Этот двугранный угол равен углу, образованному перпендикулярами к данным плоскостям. Вектор, нормальный к первой плоскости, обозначим через $\mathbf{n}_1=\{A_1; B_1; C_1\}$, а вектор, нормальный ко второй плоскости,— через $\mathbf{n}_2=\{A_2; B_2; C_2\}$. По формуле (4.70) находим

$$\cos\psi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{5.26}$$

Это и есть искомая формула для вычисления угла между двумя плоскостями. Если данные плоскости взаимно перпендикулярны, то $\cos\psi=0$ и

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \tag{5.27}$$

Равенство (5.27) представляет собой *условие перпендикулярности двух плоскостей*.

Условие параллельности плоскостей можно легко получить как условие коллинеарности двух нормальных векторов

$$\mathbf{n}_1=\{A_1;\ B_1;\ C_1\}\ \text{и}\ \mathbf{n}_2=\{A_2;\ B_2;\ C_2\},$$

а именно

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \tag{5.28}$$

Итак, условие (5.28) параллельности плоскостей состоит в пропорциональности коэффициентов при неизвестных x, y, z.

Пример 1. Через точку $M(2;\ 3;\ -1)$ провести плоскость, параллельную плоскости $2x-3y+5z-4=0$.

Решение. Воспользуемся уравнением связки плоскостей (5.24). Для данного случая оно имеет вид

$$A(x-2)+B(y-3)+C(z+1)=0.$$

Из условия параллельности двух плоскостей имеем

$$\frac{A}{2}=\frac{B}{-3}=\frac{C}{5}=k.$$

Заменяя в последнем уравнении A, B и C величинами, им пропорциональными, получаем: $2k(x-2)-3k(y-3)+5k(z+1)=0$. После упрощений искомое уравнение плоскости принимает вид

$$2x-3y+5z+10=0.$$

Упражнения

1. Определить угол между плоскостями $2x-y+2z+15=0$ и $6x+2y-3z-1=0$.
Отв. $\varphi=\arccos\frac{4}{21}$.

2. Определить угол между плоскостями $6x+2y-4z+5=0$ и $9x+3y-6z-2=0$.
Отв. Плоскости параллельны.

3. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку (2; 5; —1) и параллельной плоскости $x+3y-4z+5=0$.
Отв. $x+3y-4z-21=0$.

4. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M(-1;\ 2;\ -3)$ и $N(1;\ 4;\ -5)$ и перпендикулярной плоскости $3x+5y-6z+1=0$.
Отв. $x-3y-2z+1=0$.

5. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку (2; —1; 1) и перпендикулярной плоскостям $3x+2y-z+4=0$ и $x+y+z-3=0$.
Отв. $3x-4y+z-11=0$.

§ 7. УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Каждая линия в пространстве рассматривается как пересечение двух поверхностей. Поэтому линия в пространстве задается уравнениями двух поверхностей. Таким образом, если $F_1(x, y, z)=0$ и $F_2(x, y, z)=0$ — уравнения двух поверхностей, пересекающихся по некоторой линии L, то линия L есть геометрическое место общих точек этих поверхностей, т. е. точек, координаты которых одновременно

удовлетворяют обоим уравнениям поверхностей. Итак, два уравнения

$$\left.\begin{aligned} F_1(x,\ y,\ z) &= 0, \\ F_2(x,\ y,\ z) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.29}$$

совместно определяют линию L. В частности, система уравнений двух плоскостей

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.30}$$

не параллельных друг другу, определяет в пространстве прямую линию. Следовательно, условием того, что два уравнения первой степени вида (5.30) определяют в пространстве прямую линию, является непараллельность определяемых ими плоскостей или, иначе, неколлинеарность нормальных векторов этих плоскостей $\mathbf{n}_1 = \{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ и $\mathbf{n}_2\{A_2;\ B_2;\ C_2\}$. Но условием коллинеарности двух векторов является пропорциональность их координат. Следовательно, два уравнения вида (5.30) совместно определяют прямую только в том случае, когда коэффициенты одного уравнения непропорциональны коэффициентам другого.

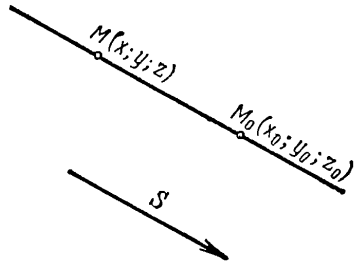

Рис. 5.4

Пусть дана произвольная прямая. Положение прямой в пространстве вполне определено, если на ней дана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и указано направление прямой с помощью некоторого вектора $\mathbf{s}$, которому прямая параллельна (рис. 5.4). Такой вектор $\mathbf{s}$ называется *направляющим вектором* прямой. Пусть вектор $\mathbf{s}$ имеет координаты m, n, p. Выведем уравнения прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0;\ y_0,\ z_0)$, направляющий вектор которой $\mathbf{s} = \{m;\ n;\ p\}$. Пусть $M(x;\ y;\ z)$ — произвольная точка прямой (рис. 5.4). Очевидно, что вектор $\overline{MM_0} = \{x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0\}$ коллинеарен вектору $\mathbf{s} = \{m; = n;\ p\}$. Исходя из условия коллинеарности двух векторов, имеем

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{5.31}$$

Уравнения (5.31) являются уравнениями искомой прямой, проходящей через точку M_0 в направлении вектора $\mathbf{s}$. Уравнения прямой вида (5.31) называются *каноническими уравнениями прямой*. Координаты m, n, p направляющего вектора $\mathbf{s}$ называются *направляющими параметрами* этой прямой. Направляющие косинусы вектора $\mathbf{s}$ называются *направляющими косинусами прямой*.

Пример 1. Найти канонические уравнения прямой, заданной пересечением двух непараллельных плоскостей

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Решение. Проекциями нормального вектора первой из плоскостей являются числа A_1, B_1, C_1, следовательно, $\mathbf{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$. Аналогично, нормальный вектор второй плоскости $\mathbf{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$. Направляющий вектор $\mathbf{s} = \{m; n; p\}$ данной прямой перпендикулярен векторам $\mathbf{n}_1$ $\mathbf{n}_2$ и, следовательно, может быть найден как их векторное произведение:

$$\mathbf{s} = [\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2],$$

$$\mathbf{s} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \; - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}; \; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\},$$

откуда

$$m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \; n = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \; p = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

Координаты x_0, y_0, z_0 точки M_0, лежащей на прямой, найдем из данной системы уравнений, выбирая одну из координат произвольно и решая полученную систему относительно двух других координат.

Пусть даны канонические уравнения произвольной прямой:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Обозначим буквой t каждое из равных отношений этих уравнений:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + mt, \\ y &= y_0 + nt, \\ z &= z_0 + pt. \end{aligned}\right\} \tag{5.32}$$

Уравнения (5.32) называются *параметрическими уравнениями прямой, проходящей через точку* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *и имеющей направляющий вектор* $\mathbf{s} = \{m; n; p\}$. При изменении параметра t величины x, y, z меняются так, что точка $M(x; y; z)$ движется по данной прямой.

Пример 2. Найти точку пересечения прямой

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y + 1}{-1} = \frac{z - 2}{5}$$

с плоскостью $x + y - 2z - 4 = 0$.

Решение. Представим уравнение прямой в параметрическом виде. В силу соотношений (5.32) имеем

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 + 3t, \\ y &= -1 - t, \\ z &= 2 + 5t. \end{aligned}\right\}$$

Так как координаты x, y, z точки пересечения прямой и плоскости должны удовлетворять уравнениям прямой и уравнению плоскости,

то, подставляя их значения в данное уравнение плоскости, получаем

$$1+3t+(-1-t)-2(2+5t)-4=0,$$

откуда $t=-1$. Найденное значение t есть величина параметра в точке пересечения прямой и плоскости. В результате подстановки этого значения в уравнения прямой в параметрической форме находим

$$\begin{aligned} x&=1+3(-1) \text{ или } x=-2;\\ y&=-1+1 \text{ или } y=0;\\ z&=2+5(-1) \text{ или } z=-3. \end{aligned}$$

Итак, координаты точки пересечения данной прямой и плоскости таковы: (—2; 0; —3).

Пусть даны две точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$. Найдем канонические уравнения прямой, проходящей через эти точки. Возьмем направляющий вектор $\mathbf{s}$, равный вектору $\overline{AB}$. Тогда известны проекции вектора $\mathbf{s}=\{m; n; p\}$, а именно: $m=x_2-x_1$, $n=y_2-y_1$, $p=z_2-z_1$. В качестве заданной точки на прямой возьмем точку A (или B). Тогда канонические уравнения искомой прямой имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{5.33}$$

Пример 3. Составить уравнения прямой, проходящей через точки $A(2; -1; 0)$ и $B(3; -1; -1)$.

Решение. Согласно равенствам (5.33) уравнения искомой прямой имеют вид

$$\frac{x-2}{3-2}=\frac{y+1}{-1+1}=\frac{z-0}{-1-0},$$

или

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{-1}.$$

Упражнения

1. Общие уравнения прямой

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z-13&=0,\\ 3x+y+4z-14&=0 \end{aligned}\right\}$$

написать в каноническом виде.

Отв. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z}{-1}$.

2. Найти уравнения прямой, проходящей через точку $A(4; 3; 0)$ и параллельной направляющему вектору $\mathbf{s}=\{-1; 1; 1\}$.

Отв. $\dfrac{x-4}{-1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{1}$.

3. Найти точку A пересечения прямой

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$$

и плоскости $x+2y+3z-29=0$.

Отв. $A(6; 4; 5)$.

4. Найти уравнения прямой, проходящей через точки $M(1;\ 2;\ -1)$ и $N(0;\ 3;\ -4)$.

Отв. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+1}{3}$.

5. Найти уравнения прямой, проходящей через точки $A(3;\ 0;\ 4)$ и $B(-1;\ -2;\ 3)$.

Отв. $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-0}{3}=\dfrac{z-4}{1}$.

6. Найти параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $(-2;\ 1;\ -1)$ и параллельной направляющему вектору $\mathbf{s}=\{1;\ -2;\ 3\}$.

Отв. $x=-2+t,\ y=1-2t,\ z=-1+3t$.

§ 8. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ. УСЛОВИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМЫХ

Найдем угол между прямыми, заданными каноническими уравнениями. Известно, что угол между данными прямыми называется углом между пересекающимися прямыми, параллельными данным. Данные же прямые могут не лежать в одной плоскости, а скрещиваться. Угол между прямыми отсчитывают в границах от 0 до π. Пусть прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями

$$\frac{x-x_0}{m_1}=\frac{y-y_0}{n_1}=\frac{z-z_0}{p_1} \text{ и } \frac{x-x_0}{m_2}=\frac{y-y_0}{n_2}=\frac{z-z_0}{p_2}.$$

Угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами $\mathbf{s}_1=\{m_1;\ n_1;\ p_1\}$ и $\mathbf{s}_2=\{m_2;\ n_2;\ p_2\}$. Используя равенство (4.70), находим

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \tag{5.34}$$

По этой формуле вычисляется угол φ между двумя прямыми l_1 и l_2. Если же в уравнения прямых l_1 и l_2 входят направляющие косинусы, то

$$\cos\varphi=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2 \tag{5.35}$$

(в этом случае знаменатель соотношения (5.34) равен единице). Если прямые l_1 и l_2 взаимно перпендикулярны, то $\cos\varphi=0$ и из соотношения (5.34) следует

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0. \tag{5.36}$$

Зависимость (5.36) выражает условие перпендикулярности двух прямых в пространстве. Условием параллельности прямых l_1 и l_2 является условие коллинеарности направляющих векторов $\mathbf{s}_1=\{m_1;\ n_1;\ p_1\}$ и $\{\mathbf{s}_2=m_2;\ n_2;\ p_2\}$, а именно пропорциональность проекций этих векторов, т. е.

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}. \tag{5.37}$$

Пример 1. Найти острый угол между двумя прямыми

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{2} \text{ и } \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+1}{-2}.$$

Решение. Угол φ между двумя прямыми определяется с помощью соотношения (5.34), в котором $m_1=3$, $n_1=-1$, $p_1=2$; $m_2=2$, $n_2=4$, $p_2=-2$:

$$\cos\varphi=\pm\frac{3\cdot2+(-1)\cdot4+2\cdot(-2)}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+4^2+(-2)^2}}=\pm\frac{-2}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{24}}=\pm0{,}1091.$$

Так как по условию угол между прямыми острый, то $\cos\varphi$ берется положительным: $\cos\varphi=0{,}1091$. Пользуясь таблицами тригонометрических функций, находим: $\varphi=83°44'$.

Пример 2. Через точку $A(1;\ -1;\ 2)$ провести прямую, параллельную прямой

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{2}.$$

Решение. Напишем уравнение искомой прямой, проходящей через точку A:

$$\frac{x-1}{m}=\frac{y+1}{n}=\frac{z-2}{p}.$$

Из условия (5.37) параллельности двух прямых имеем

$$\frac{m}{1}=\frac{n}{3}=\frac{p}{2}=k,$$

откуда $m=k$; $n=3k$; $p=2k$. Заменяя в искомом уравнении m, n, p числами, им пропорциональными, получим

$$\frac{x-1}{k}=\frac{y+1}{3k}=\frac{z-2}{2k}.$$

Уравнение искомой прямой имеет вид

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}.$$

Упражнения

1. Найти острый угол между двумя прямыми

$$\left.\begin{aligned}2x+3y-4z+5&=0,\\ x-y+z&=0\end{aligned}\right\}$$

и

$$\left.\begin{aligned}x-y+2z-4&=0,\\ 2x+y-z-5&=0.\end{aligned}\right\}$$

Отв. $\cos\varphi=0{,}9445$; $\varphi=19°11'$.

2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку (2; —1; 3) и параллельной оси Ox.

Отв. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{0}=\dfrac{z-3}{0}$.

3. Найти уравнения прямой, проходящей через точку (—4; 3; 0) и параллельно прямой

$$\left.\begin{aligned}x-2y+z&=4,\\ 2x+y-z&=0.\end{aligned}\right\}$$

Отв. $\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z}{5}$.

4. Найти расстояние точки $M(2; -1; 3)$ от прямой

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{5}.$$

Отв. $0{,}3\sqrt{38}$ ед.

5. Найти уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $(2; -3; 4)$ на ось Oz.

Отв. $3x+2y=0,\ z=4.$

§ 9. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ. УСЛОВИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

Пусть даны уравнения прямой l:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

и плоскости Q:

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Углом θ *между прямой и плоскостью* называется угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость. Условимся считать, что $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$. Из точки пересечения прямой с плоскостью восставим перпендикуляр $\mathbf{n}$, который является нормалью к плоскости Q, т. е. $\mathbf{n}=\{A; B; C\}$ (рис. 5.5). Нормаль $\mathbf{n}$ образует с прямой l угол $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$, который можно найти, если известны направляющий вектор $\mathbf{s}=\{m; n; p\}$ и нормаль $\mathbf{n}=\{A; B; C\}$. Тогда $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ и, используя равенство (4.70), находим

$$\sin\theta=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \tag{5.38}$$

Учитывая, что $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$, знак правой части всегда берут положительным (за счет выбора соответствующих знаков перед радикалами). Если прямая l и плоскость Q параллельны, то $\sin\theta=0$ и

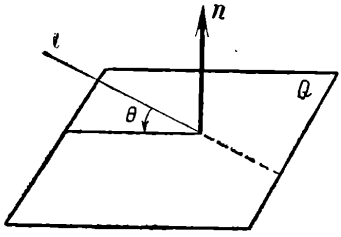

Рис. 5.5

$$Am+Bn+Cp=0. \tag{5.39}$$

Соотношение (5.39) представляет собой условие параллельности прямой и плоскости в пространстве. Условие перпендикулярности прямой и плоскости равносильно требованию параллельности прямой l и нормали $\mathbf{n}$ к плоскости Q. Отсюда следует, что проекции направляющего вектора $\mathbf{s}$ и нормали $\mathbf{n}$ должны быть пропорциональны, т. е.

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \tag{5.40}$$

Равенства (5.40) выражают условие перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве.

Пример 1. Найти острый угол между прямой

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2}$$

и плоскостью $2x+y-z+4=0$.

Решение. На основании соотношения (5.40), полагая $A=2$, $B=1$, $C=-1$; $m=2$, $n=1$, $p=2$, находим

$$\sin\theta=\frac{2\cdot 2+1\cdot 1+(-1)\cdot 2}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}=0{,}4080.$$

Отсюда

$$\theta=\arcsin 0{,}4080=24°5'.$$

Пример 2. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $P(1;\ 2;\ -1)$ и перпендикулярной прямой

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{4}.$$

Решение. В силу равенства (5.24) уравнение плоскости, проходящей через точку P, можно записать в виде

$$A(x-1)+B(y-2)+C(z+1)=0.$$

Используя условие (5.40) перпендикулярности прямой и плоскости, заменим в последнем уравнении величины A, B и C им пропорциональными величинами m, n и p, взятыми из уравнений прямой, т. е. числами 1, -3 и 4. Тогда

$$1(x-1)-3(y-2)+4(z+1)=0.$$

После упрощений искомое уравнение плоскости принимает вид

$$x-3y+4z+9=0.$$

Упражнения.

1. Найти острый угол между прямой

$$\left.\begin{aligned}x+y+z-4&=0,\\2x-y+4z+5&=0\end{aligned}\right\}$$

и плоскостью $x+y+3z-1=0$.

Отв. $\varphi=17°4'$.

2. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;\ -4;\ -2)$ и перпендикулярной прямой

$$\left.\begin{aligned}x-4y+5z-1&=0,\\2x+y+3&=0.\end{aligned}\right\}$$

Отв. $5x-10y-9z-68=0$.

3. Найти уравнения перпендикуляра к плоскости $3x-y-5z-8=0$, проходящего через точку $A(1;\ -1;\ 2)$.

Отв. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{-5}$.

4. Найти уравнения перпендикуляра к плоскости $x+3y-4z-13=0$, проходящего через точку $A(2;\ -1;\ 3)$, и определить координаты основания B перпендикуляра.

Отв. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-4}$; $B(3;\ 2;\ -1)$.

5. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;\ -1;\ 0)$ и прямую

$$\left.\begin{aligned} x-y+3z-1=0,\\ 2x+y-z+2=0. \end{aligned}\right\}$$

Отв. $x-7y+17z-9=0$.

6. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\left.\begin{aligned} 3x-y+z-5=0,\\ x+2y-z+2=0. \end{aligned}\right\}$$

и параллельной прямой

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{2}.$$

Отв. $6x+5y-2z+1=0$.

7. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$$

и перпендикулярной плоскости $3x-y+2z-2=0$.

Отв. $4x+2y-5z=0$.

§ 10. ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

Все поверхности, определяемые алгебраическими уравнениями, различаются порядком. Так, плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ есть поверхность первого порядка, а сфера $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=z^2$ — поверхность второго порядка. Рассмотрим несколько частных случаев поверхностей второго порядка.

Поверхность, образованная движением прямой, которая перемещается параллельно самой себе, пересекая кривую линию, называется *цилиндрической поверхностью* или *цилиндром*.

Пусть в плоскости xOy кривая задана уравнением $F(x,\ y)=0$ (рис. 5.6). Возьмем прямую l, параллельную оси Oz, которая пересекается с кривой $F(x,\ y)=0$ в точке M_0. На прямой l выберем произвольную точку $M(x;\ y;\ z)$, проектирующуюся на кривую в виде точки M_0, первые две координаты которой совпадают с соответствующими координатами точки M. Таким образом, координаты произвольной точки M, лежащей на прямой l, удовлетворяют уравнению кривой $F(x,\ y)=0$. Если прямую l перемещать параллельно самой себе так, чтобы точка M_0 перемещалась по кривой $F(x,\ y)=0$, то образуется цилиндрическая поверхность, любая точка которой своими первыми двумя координатами удовлетворяет уравнению кривой $F(x,\ y)=0$. Так как движущаяся прямая l остается параллельной оси Oz, то уравнение этой цилиндрической поверхности не содержит координаты z. Аналогично, уравнения цилиндрических поверхностей, параллельных осям Ox и Oy, не содержат соответственно координаты x и y. Линия, вдоль которой движется прямая l, называется *направляющей*, а сама прямая — *образующей*

цилиндрической поверхности. Вид направляющей цилиндрической поверхности определяет вид цилиндра. Так, например, если направляющая линия цилиндра есть окружность $x^2+z^2=r^2$ в плоскости xOz, то это уравнение определяет круговой цилиндр с осью, парал-

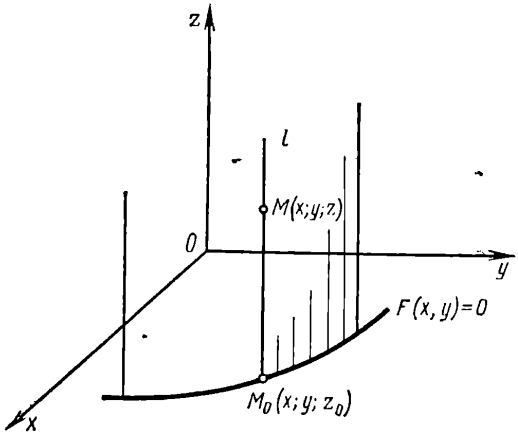

Рис. 5.6

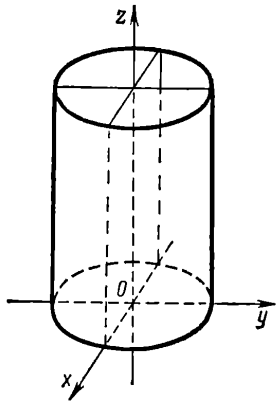

Рис. 5.7

лельной оси Oy. Кроме того, в зависимости от характера направляющей различают цилиндры следующих типов:

1) эллиптический цилиндр (рис. 5.7). В этом случае направляющая линия цилиндра есть эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в плоскости xOy, а образующая параллельна оси Oz;

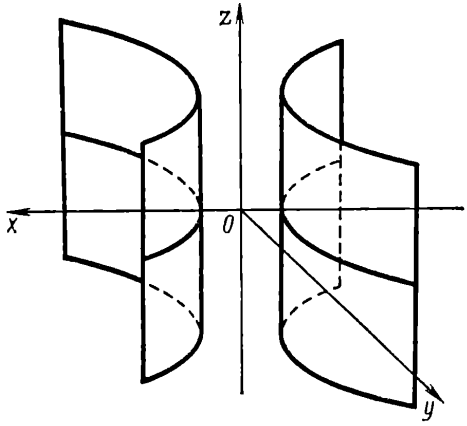

Рис. 5.8

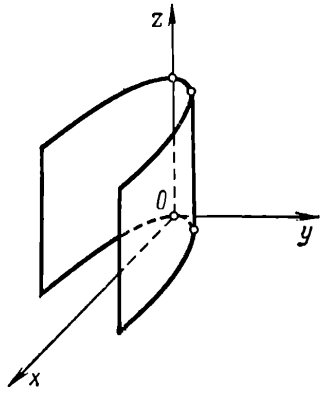

Рис. 5.9

2) гиперболический цилиндр (рис. 5.8). В этом случае направляющая линия цилиндра есть гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ в плоскости xOy, а образующая параллельна оси Oz;

3) параболический цилиндр (рис. 5.9). В этом случае направляющая линия цилиндра есть парабола $y^2=2px$ в плоскости xOy, а образующая параллельна оси Oz.

Пример 1. Определить поверхность, заданную уравнением

$$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Решение. Данное уравнение содержит две переменные x и y и определяет в пространстве цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей является эллипс (такой цилиндр называется *эллиптическим*). Действительно, в плоскости xOy данное уравнение определяет эллипс с полуосями $a=3$ и $b=2$. Пусть этот эллипс является направляющей цилиндра, а его образующие параллельны оси Oz. Возьмем на цилиндре любую точку $M(x;\ y;\ z)$ и спроектируем ее на плоскость xOy (рис. 5.10). Ее проекция — точка $N(x;\ y;\ 0)$ — находится на эллипсе, который служит направляющей, поэтому координаты x и y точки N удовлетворяют уравнению эллипса $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$. Абсцисса и ордината точки $M(x;\ y;\ z)$ на цилиндрической поверхности совпадают с абсциссой и ординатой точки $N(x;\ y;\ 0)$ на эллипсе, поэтому, учитывая, что уравнение эллипса $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$ не содержит переменной z, можно утверждать, что этому уравнению удовлетворяют и координаты любой точки $M(x;\ y;\ z)$, лежащей на цилиндре. Итак, уравнение $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}=1$ определяет в пространстве эллиптический цилиндр, образующие которого параллельны оси Oz, а направляющей служит эллипс, лежащий в плоскости xOy.

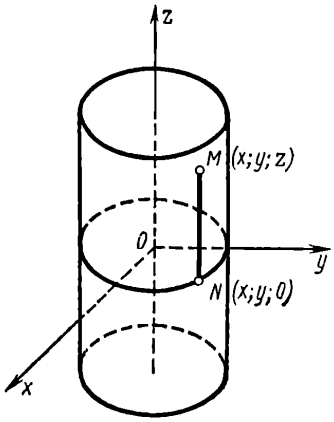

Рис. 5.10

Упражнения

Какие поверхности определяются уравнениями:

1. $x^2+z^2=9$?

Отв. Круговой цилиндр радиусом $R=3$ с осью вращения Oy.

2. $16y^2-25z^2=400$?

Отв. Гиперболический цилиндр с образующими, параллельными оси Ox.

3. $y^2=-6z$?

Отв. Параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Ox.

4. $xz=2$?

Отв. Гиперболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oy.

5. $x^2+y^2=4y$?

Отв. Круговой цилиндр, ось которого совпадает с прямой $x=0$, $y=2$.

§ 11. ЭЛЛИПСОИД

Поверхность, которая в системе прямоугольных координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (5.41)$$

называется *эллипсоидом*, а уравнение (5.41) называется *каноническим уравнением эллипсоида*.

Чтобы изучить форму эллипсоида, пересечем его плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Пересечем эллипсоид плоскостями, параллельными плоскости xOy. Каждая такая плоскость определяется уравнением $z=h$, а линии, получаемые в сечении, определяются уравнениями

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{array}\right\} \tag{5.42}$$

При $|h|<c$ первое из уравнений (5.42) определяет в пространстве эллипс с полуосями

$$a'=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},\quad b'=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}. \tag{5.43}$$

Этот эллипс расположен симметрично относительно плоскостей xOz и yOz.

Исследуем равенства (5.43). Очевидно, что если $h=0$, то $a'=a$ и $b'=b$. В этом случае полуоси эллипса имеют наибольшее значение. Иначе говоря, наибольший эллипс образуется при сечении эллипсоида координатной плоскостью $z=0$.

Линии, по которым эллипсоид пересекается с координатными плоскостями, называются *главными сечениями эллипсоида*. При возрастании h величины a' и b' убывают, а при $h=\pm c$ обращаются в нуль. Эллипс, вырождаясь, обращается в точку. Иначе говоря, плоскости $z=\pm c$ касаются эллипсоида. Аналогичная картина имеет место при пересечении эллипсоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям xOz и yOz. Линии пересечения соответственно определяются уравнениями

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2},\\ y=h;\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{a^2},\\ x=h.\end{array}\right\}$$

Эти линии в пространстве на соответствующих уровнях являются эллипсами (рис. 5.11).

Итак, эллипсоид есть овальная поверхность, обладающая тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии. Величины a, b, c называются *полуосями эллипсоида*. Если $a\neq b\neq c$, то эллипсоид называется *трехосным*. Пусть две любые полуоси эллипсоида одинаковы, например $a=b$. Тогда уравнения (5.42) принимают вид

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h,\end{array}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right),\\ z&=h. \end{aligned}\right\} \tag{5.44}$$

Уравнения (5.44) определяют окружность с центром на оси Oz. Таким образом, при $a=b$ эллипсоид представляет собой поверхность вращения, получаемую вращением эллипса вокруг одной из координатных осей. При $a=b=c$ эллипсоид представляет собой сферу.

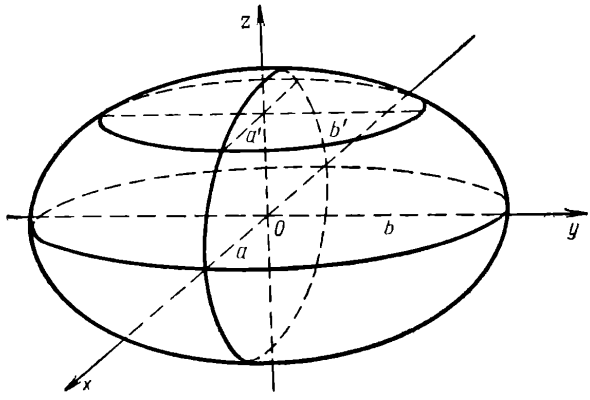

Рис. 5.11

Пример. Найти главные сечения эллипсоида

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=1,$$

определить координаты их вершин и длину осей.

Решение. Полагая в уравнении (5.41) $z=0$, получим уравнения линии пересечения эллипсоида с плоскостью xOy:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}&=1,\\ z&=0, \end{aligned}\right\}$$

первое из которых в плоскости xOy определяет эллипс. В сечении данного эллипсоида плоскостью $y=0$ (координатная плоскость xOz) получается эллипс

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}&=1,\\ y&=0. \end{aligned}\right\}$$

Координатная же плоскость yOz, уравнение которой $x=0$, пересекает данный эллипсоид по эллипсу

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}&=1,\\ x&=0. \end{aligned}\right\}$$

Таким образом, главные сечения данного эллипсоида представляют собой эллипсы, лежащие в координатных плоскостях. Координаты вершин этих эллипсов определяют координаты вершин эллипсоида. Вершины эллипсоида, лежащие в плоскости xOy, имеют координаты (5; 0; 0), (—5; 0; 0), (0; 4; 0) и (0; —4; 0); вершины эллипсоида, лежащие в плоскости xOz, имеют координаты (5; 0; 0), (—5; 0; 0), (0; 0; 2) и (0; 0; —2); вершины эллипсоида, лежащие в плоскости yOz, имеют координаты (0; 4; 0), (0; —4; 0), (0; 0; 2) и (0; 0; —2). Объединяя эти данные, приходим к выводу, что у эллипсоида шесть вершин с координатами $A_1(5; 0; 0)$, $A_2(-5; 0; 0)$, $A_3(0; 4; 0)$, $A_4(0; -4; 0)$, $A_5(0; 0; 2)$ и $A_6(0; 0; -2)$. Сравнивая уравнения данного эллипсоида с уравнением эллипсоида (5.41), заключаем, что $a^2 = 25$ и полуось $a = 5$; ось эллипсоида, расположенная вдоль оси Ox, равна $2a = 10$; $b^2 = 16$, полуось $b = 4$; ось эллипсоида, расположенная вдоль оси Oy, равна $2b = 8$; $c^2 = 4$, полуось $c = 2$; ось эллипсоида, расположенная вдоль оси Oz, равна $2c = 4$.

Упражнения

1. Найти уравнение поверхности, образованной вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $y=0$ вокруг оси Oz.

Отв. $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

2. Построить поверхность $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1$ и найти площади ее сечений плоскостями: а) $z=3$; б) $y=1$.

Отв. а) $3{,}84\pi$; б) $\frac{45}{4}\pi$.

3. Найти точки пересечения эллипсоида $x^2+2y^2+4z^2=2$ с прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{a}$ при $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$. При каком значении a прямая касается эллипсоида?

Отв. $M_1\left(0; 0; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_2\left(\frac{4}{5}; \frac{4}{5}; -\frac{\sqrt{2}}{10}\right)$, $a=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

4. Доказать, что плоскость $x-2=0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ по эллипсу; найти его полуоси и вершины.

Отв. $b=3$, $c=\sqrt{3}$; (2; 3; 0).

§ 12. ГИПЕРБОЛОИДЫ

Существуют два вида гиперболоидов: однополостный и двуполостный. Поверхность, которая в системе прямоугольных координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (5.45)$$

называется *однополостным гиперболоидом*. Уравнение (5.45) называется *каноническим уравнением однополостного гиперболоида*. Для

определения формы однополостного гиперболоида исследуем его уравнение, применяя метод сечений плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Пересечем однополостный гиперболоид плоскостями, параллельными плоскости xOy. Каждая из таких плоскостей определяется уравнением $z=h$, а линия, получаемая в сечении, определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}&=1+\frac{h^2}{c^2}, \\ z&=h. \end{aligned}\right\} \tag{5.46}$$

Таким образом, плоскость $z=h$ пересекает однополостный гиперболоид, определяемый уравнением (5.45), по эллипсу с полуосями

$$a'=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}} \text{ и } b'=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}. \tag{5.47}$$

Этот эллипс расположен симметрично относительно плоскостей xOz и yOz.

Исследуем равенства (5.47). Очевидно, что если $h=0$, то $a'=a$ и $b'=b$. В этом случае полуоси эллипса имеют наименьшее значение. Иначе говоря, наименьший эллипс образуется при сечении однополостного гиперболоида координатной плоскостью $z=0$. Линии, по которым гиперболоид пересекается с координатными плоскостями, называются *главными сечениями* гиперболоида. В частности, главное сечение однополостного гиперболоида, получаемое в результате сечения его координатной плоскостью $z=0$, называется *горловым эллипсом* однополостного гиперболоида. При бесконечном возрастании h полуоси эллипса также бесконечно возрастают (рис. 5.12). При пересечении однополостного гиперболоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям xOz и yOz, линии, образуемые в сечениях, определяются соответственно уравнениями:

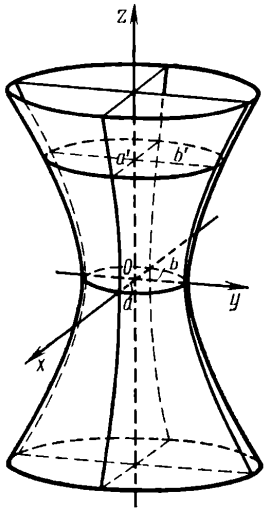

Рис. 5.12

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}&=1-\frac{h^2}{b^2}, \\ y&=h \end{aligned}\right\} \text{ и } \left.\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}&=1-\frac{h^2}{a^2}, \\ x&=h. \end{aligned}\right\}$$

Эти линии в пространстве являются гиперболами. В частности, при пересечении однополостного гиперболоида координатной плоскостью xOz в сечении получается гипербола, определяемая уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}&=1, \\ y&=0, \end{aligned}\right\}$$

которая симметрична относительно координатных осей Ox и Oz и пересекает ось Ox. При пересечении однополостного гиперболоида

координатной плоскостью yOz в сечении получается гипербола, определяемая уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}&=1,\\ x&=0, \end{aligned}\right\}$$

которая симметрична относительно координатных осей Oy и Oz и пересекает ось Oy.

Итак, однополостный гиперболоид имеет вид бесконечной трубки, бесконечно расширяющейся в обе стороны от горлового эллипса (рис. 5.12). Однополостный гиперболоид обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии. Величины a, b, c называются *полуосями однополостного гиперболоида*. При $a=b$ уравнения (5.46) определяют окружность с центром на оси Oz, а именно

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}&=1+\frac{h^2}{c^2},\\ z&=h, \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right),\\ z&=h. \end{aligned}\right\} \tag{5.48}$$

Таким образом, при $a=b$ однополостный гиперболоид представляет собой поверхность вращения, получаемую вращением гиперболы вокруг оси, которую эта гипербола не пересекает.

Поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{5.49}$$

называется *двуполостным гиперболоидом*. Уравнение (5.49) называется *каноническим уравнением двуполостного гиперболоида*. Для определения формы двуполостного гиперболоида исследуем его уравнение, применяя метод сечений. Пересечем двуполостный гиперболоид плоскостями, параллельными плоскости xOy. Каждая из таких плоскостей определяется уравнением $z=h$, а линия, получаемая в сечении, определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}&=\frac{h^2}{c^2}-1,\\ z&=h. \end{aligned}\right\} \tag{5.50}$$

Таким образом, плоскость $z=h$ пересекает двуполостный гиперболоид, определяемый уравнением (5.49), по эллипсу с полуосями

$$a'=a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1} \quad \text{и} \quad b'=b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}. \tag{5.51}$$

Этот эллипс расположен симметрично относительно плоскостей xOz и yOz.

Исследуем равенства (5.51). Очевидно, что при бесконечном возрастании $|h|$ величины полуосей эллипса a' и b' возрастают бес-

конечно, а при убывании $|h|$ до значения c величины a', b' также убывают до нуля. Далее, при $h=\pm c$ величины a' и b' обращаются в нуль и эллипс вырождается в точку. Иначе говоря, плоскости $z=\pm c$ касаются двуполостного гиперболоида. При $|h|<c$ величины полуосей a' и b' являются мнимыми числами. В этом случае уравнения (5.50) определяют мнимый эллипс и, следовательно, плоскость $z=h$ при $|h|<c$ с двуполостным гиперболоидом не пересекается. При пересечении двуполостного гиперболоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям xOz и yOz, линии, образуемые в сечениях, будут соответственно определяться уравнениями

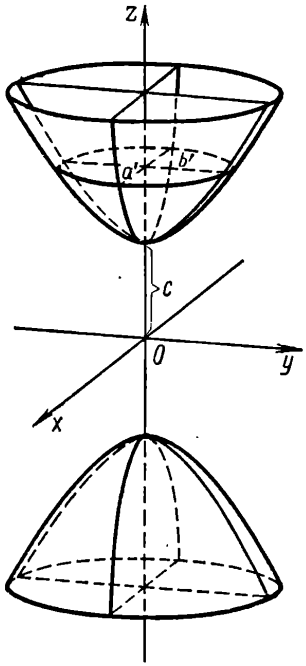

Рис. 5.13

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}&=\frac{h^2}{b^2}-1,\\ y&=h\end{aligned}\right\}$$

и

$$\left.\begin{aligned}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}&=\frac{h^2}{a^2}-1,\\ x&=h.\end{aligned}\right\}$$

Эти линии в пространстве являются гиперболами. В частности, при пересечении двуполостного гиперболоида координатной плоскостью xOz в сечении получается гипербола, определяемая уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}&=-1,\\ y&=0,\end{aligned}\right\}$$

которая симметрична относительно координатных осей Ox и Oz и пересекает ось Oz. При пересечении двуполостного гиперболоида координатной плоскостью yOz в сечении получается гипербола, определяемая уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}&=-1,\\ x&=0,\end{aligned}\right\}$$

которая симметрична относительно координатных осей Oy и Oz и пересекает ось Oz.

Итак, двуполостный гиперболоид представляет собой поверхность, состоящую из двух отдельных полостей, каждая из которых имеет вид бесконечно выпуклой чаши (рис. 5.13). Двуполостный гиперболоид обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии. Величины a, b, c называются *полуосями двуполостного гиперболоида*. При $a=b$ уравнения (5.50) определяют окружность с центром на оси Oz, а именно

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}&=\frac{h^2}{c^2}-1,\\ z&=h\end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{array}{c} x^2+y^2=a^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right), \\ z=h. \end{array}\right\} \tag{5.52}$$

Таким образом, при $a=b$ двуполостный гиперболоид представляет собой поверхность вращения, получаемую путем вращения гиперболы вокруг оси, которую эта гипербола не пересекает.

Пример 1. Исследовать сечения однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1$$

плоскостями $x=0$, $y=0$ и $z=h$, где $h=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

Решение. Рассмотрим сечение однополостного гиперболоида плоскостями $z=h$. Подставляя $z=h$ в уравнение однополостного гиперболоида, получим

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{h^2}{9}=1, \text{ или } \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1+\frac{h^2}{9}.$$

Отсюда

$$\frac{x^2}{4\left(1+\frac{h^2}{9}\right)}+\frac{y^2}{9\left(1+\frac{h^2}{9}\right)}=1.$$

Обозначая $a_h=2\sqrt{1+\frac{h^2}{9}}$ и $b_h=3\sqrt{1+\frac{h^2}{9}}$, замечаем, что в сечении получается эллипс

$$\left.\begin{array}{c} \frac{x^2}{a_h^2}+\frac{y^2}{b_h^2}=1, \\ z=h \end{array}\right\}$$

с полуосями a_h и b_h.

При $h=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ получаем:

$$a_0=2;\ a_{\pm 1}=2\sqrt{\frac{10}{9}}=\frac{2}{3}\sqrt{10}\approx 2{,}1;\ a_{\pm 2}=2\sqrt{\frac{13}{9}}=\frac{2}{3}\sqrt{13}\approx 2{,}4;$$

$$a_{\pm 3}=2\sqrt{2}\approx 2{,}8$$

и

$$b_0=3;\ b_{\pm 1}=3\sqrt{\frac{10}{9}}=\sqrt{10}\approx 3{,}2;\ b_{\pm 2}=3\sqrt{\frac{13}{9}}=\sqrt{13}\approx 3{,}6;$$

$$b_{\pm 3}=3\sqrt{2}\approx 4{,}2.$$

Таким образом, наименьший эллипс получается при сечении однополостного гиперболоида координатной плоскостью $xOy\,(z=0)$. Если поднимать или опускать эту плоскость вдоль оси Oz параллельно плоскости $z=0$, то размеры сечения увеличиваются, становясь наибольшими при $z=\pm 3$. При пересечении данного однополостного гиперболоида координатными плоскостями $x=0$ и $y=0$ в

сечении получаются гиперболы, определяемые соответственно уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{9}&=1,\\ x&=0\end{aligned}\right\} \text{ и } \left.\begin{aligned}\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{9}&=1,\\ y&=0.\end{aligned}\right\}$$

В первом случае гипербола является равносторонней.

Пример 2. Определить поверхность, заданную уравнением

$$2x^2-y^2+2z^2+4x+2y+8z+1=0.$$

Решение. Для приведения данного уравнения к каноническому виду выделяем по x, y, z полные квадраты:

$$2(x^2+2x+1)-2-(y^2-2y+1)+1+2(z^2+4z+4)-8+1=0.$$

Тогда

$$2(x+1)^2-(y-1)^2+2(z+2)^2=8$$

и

$$\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{(y-1)^2}{8}+\frac{(z+2)^2}{4}=1.$$

Сравнивая полученное уравнение с каноническими уравнениями (5.45) и (5.49), замечаем, что это уравнение определяет однополостный гиперболоид с центром, смещенным в точку $O'(-1;\ 1;\ -2)$. Так как $a=c=2$, то это однополостный гиперболоид вращения вокруг оси Oy.

Упражнения

1. Найти уравнение поверхности, образованной вращением кривой $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $y=0$ вокруг оси Oz.

Отв. $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

2. В каких точках прямая $\frac{x-4}{4}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-2}{2}$ пересекает однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$?

Отв. $M_1(4;\ -3;\ 2)$ и $M_2(12;\ 3;\ 6)$.

3. Доказать, что плоскость $z+1=0$ пересекает однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$ по гиперболе; найти ее полуоси и вершины A и B.

Отв. $a=4$, $b=3$; $A(4;\ 0;\ -1)$, $B(-4;\ 0;\ -1)$.

§ 13. ПАРАБОЛОИДЫ

Существуют два типа параболоидов: эллиптический и гиперболический. Поверхность, которая в системе прямоугольных координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \tag{5.53}$$

называется *эллиптическим параболоидом* (при положительных p и q). Уравнение (5.53) называется *каноническим уравнением эллиптического параболоида*. Для определения формы эллиптического параболоида исследуем, применяя метод сечений, его уравнение. Пересечем эллиптический параболоид плоскостями, параллельными плоскости xOy. Каждая из таких плоскостей определяется уравнением $z=h$, а линия, получаемая в сечении, определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}&=2h,\\ z&=h. \end{aligned}\right\} \tag{5.54}$$

Таким образом, плоскость $z=h$ пересекает эллиптический параболоид, определяемый уравнением (5.53), по эллипсу с полуосями

$$a'=\sqrt{2hp} \text{ и } b'=\sqrt{2hq}. \tag{5.55}$$

Этот эллипс расположен симметрично относительно плоскостей xOz и yOz.

Исследуем равенства (5.55). Очевидно, что при бесконечном возрастании h величины полуосей эллипса a' и b' возрастают бесконечно, а при убывании h до нуля величины a' и b' также убывают до нуля. Далее, при $h=0$ величины a' и b' обращаются в нуль. Эллипс, вырождаясь, обращается в точку. Иначе говоря, плоскость $z=0$ касается эллиптического параболоида. При $h<0$ величины полуосей a' и b' являются мнимыми числами. В этом случае уравнения (5.54) определяют мнимый эллипс, следовательно, плоскость $z=h$ (при $h<0$) с эллиптическим параболоидом не пересекается. При пересечении эллиптического параболоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям xOz и yOz, линии, образуемые в сечениях, соответственно определяются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{p}&=2z-\frac{h^2}{q},\\ y&=h \end{aligned}\right\} \text{ и } \left.\begin{aligned} \frac{y^2}{q}&=2z-\frac{h^2}{p},\\ x&=h. \end{aligned}\right\}$$

Эти линии в пространстве являются параболами. В частности, при пересечении эллиптического параболоида координатной плоскостью xOz в сечении получается парабола, определяемая уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x^2&=2pz,\\ y&=0. \end{aligned}\right\}$$

Это восходящая парабола, симметричная относительно оси Oz, с вершиной в начале координат и параметром, равным p. При пересечении эллиптического параболоида координатной плоскостью yOz в сечении получается парабола, определяемая уравнениями

$$\left.\begin{aligned} y^2&=2qz,\\ x&=0. \end{aligned}\right\}$$

Это восходящая парабола, симметричная относительно оси Oz, с вершиной в начале координат и параметром, равным q. Итак, эллип-

тический параболоид представляет собой поверхность, имеющую вид бесконечной чаши (рис. 5.14). Эллиптический параболоид обладает двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии. Точка O (рис. 5.14) называется *вершиной* эллиптического параболоида. Величины p и q называются *параметрами* эллиптического параболоида. При $p=q$ уравнения (5.54) определяют окружность с центром на оси Oz, а именно

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{p}&=2h,\\ z&=h, \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=2ph,\\ z&=h. \end{aligned}\right\} \qquad (5.56)$$

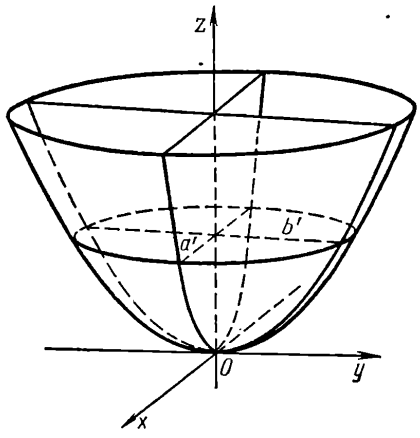

Рис. 5.14

Таким образом, при $p=q$ эллиптический параболоид представляет собой поверхность вращения, которая получается путем вращения параболы вокруг ее оси.

Поверхность, которая в системе прямоугольных координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, \qquad (5.57)$$

называется *гиперболическим параболоидом* (при положительных p и q). Уравнение (5.57) называется *каноническим уравнением гиперболического параболоида*. Для определения формы гиперболического параболоида исследуем, используя метод сечений, его уравнение. Пересечем гиперболический параболоид плоскостями, параллельными плоскости xOy. Каждая из таких плоскостей определяется уравнением $z=h$, а линия, получаемая в сечении, определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}&=2h,\\ z&=h. \end{aligned}\right\} \qquad (5.58)$$

Таким образом, плоскость $z=h$ пересекает гиперболический параболоид, определяемый уравнениями (5.58), по гиперболам. Эти гиперболы расположены симметрично относительно плоскостей xOz и yOz. При $h>0$ соответствующая гипербола пересекает плоскость xOz, а при $h<0$ гипербола пересекает плоскость yOz. При $h=0$ гипербола вырождается в пару прямых:

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=0,$$

или

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=0,$$

откуда

$$\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0 \quad \text{или} \quad \frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0.$$

При пересечении гиперболического параболоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям xOz и yOz, линии, образуемые в сечениях, будут соответственно определяться уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{p}&=2z+\frac{h^2}{q}, \\ y&=h; \end{aligned}\right\} \tag{5.59}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{q}&=-2z+\frac{h^2}{p}, \\ x&=h. \end{aligned}\right\} \tag{5.60}$$

Эти линии в пространстве являются параболами. В частности, при пересечении гиперболического параболоида координатной плоскостью xOz в сечении получается парабола, определяемая уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x^2&=2pz, \\ y&=0. \end{aligned}\right\} \tag{5.61}$$

Это восходящая парабола, симметричная относительно оси Oz, с вершиной в начале координат и параметром, равным p. Из уравнений (5.60) следует, что плоскость $x=h$ пересекает гиперболиче-

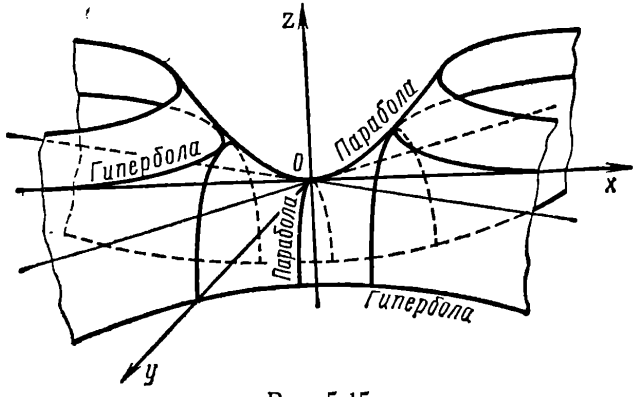

Рис. 5.15

ский параболоид по нисходящей параболе, симметричной относительно плоскости xOz. Все эти параболы имеют параметр, равный q. Вершина каждой из них лежит на восходящей параболе, определяемой уравнениями (5.62).

Итак, гиперболический параболоид представляет собой поверхность, имеющую форму седла (рис. 5.15). Гиперболический параболоид обладает двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии. Точка O (рис. 5.15) называется *вершиной* гиперболического параболоида. Величины p и q называются *параметрами* гиперболического параболоида.

Пример 1. Исследовать форму и расположение поверхности

$$4-z=x^2+y^2.$$

Решение. Применяя метод сечений и полагая в данном уравнении $z=h$, имеем $x^2+y^2=4-h$. Величина $4-h$ должна быть неотрицательной. Пусть $4-h=R^2$, тогда в сечении плоскостью $z=h$ получим линию, определяемую уравнением

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=R^2,\\ z&=h. \end{aligned}\right\}$$

Эта линия является окружностью радиуса R с центром на оси Oz. Следовательно, данная поверхность есть поверхность вращения вокруг оси Oz.

Для определения ее оси вращения пересечем поверхность плоскостью $x=0$. В сечении получится парабола на плоскости yOz:

$$\left.\begin{aligned} y^2&=4-z,\\ x&=0. \end{aligned}\right\}$$

Вершина параболы лежит в точке (0; 0; 4), а сама парабола направлена в отрицательную сторону оси Oz. Таким образом, исследуемая поверхность является параболоидом вращения.

Упражнения

1. Найти уравнение поверхности, образованной вращением параболы $az=x^2$, $y=0$ вокруг оси Oz.

Отв. $x^2+y^2=az$.

2. Показать, что прямая $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{2}$ лежит на гиперболическом параболоиде $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=z$.

Указание. Показать, что при любом значении t параметрические уравнения прямой удовлетворяют уравнению данной поверхности.

3. Доказать, что плоскость $y+6=0$ пересекает гиперболический параболоид $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$ по параболе; найти ее параметр и вершину.

Отв. 15; $\left(0;\ -6;\ -\frac{3}{2}\right)$.

§ 14. КОНУС ВТОРОГО ПОРЯДКА

Поверхность, которая в системе прямоугольных координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \tag{5.62}$$

называется *конической* или *конусом второго порядка*. Коническая поверхность состоит из прямых, проходящих через одну точку, а именно, через начало координат. Прямые, из которых составлен конус, называются его *образующими*, а точка, через которую они проходят, — *вершиной* конуса.

Для определения формы конуса второго порядка достаточно пересечь его произвольной плоскостью, не проходящей через начало координат, т. е. через его вершину. Пересечем конус второго порядка плоскостями, параллельными плоскости xOy. Каждая из таких плоскостей определяется уравнением $z=h$, а линия, получаемая в сечении,— уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}&=\frac{h^2}{c^2},\\ z&=h,\end{aligned}\right\} \tag{5.63}$$

которые определяют эллипсы с полуосями a и b, расположенные симметрично относительно координатных плоскостей xOz и yOz (рис. 5.16). При $a=b$ уравнения (5.63) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}&=\frac{h^2}{c^2},\\ z&=h,\end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned}x^2+y^2&=a^2\frac{h^2}{c^2},\\ z&=h.\end{aligned}\right\} \tag{5.64}$$

Уравнения (5.64) определяют окружность с центром на оси Oz, расположенную на уровне $z=h$. Таким образом, при $a=b$ имеем поверхность кругового конуса.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{5.65}$$

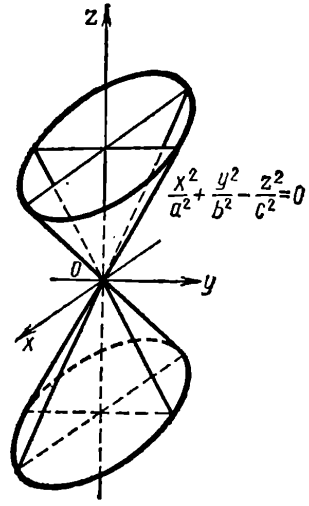

Рис. 5.16

Уравнение (5.65) определяет единственную точку с координатами $x=0$, $y=0$, $z=0$. Это уравнение называют *уравнением мнимого конуса*.

Пример 1. Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат и направляющей, заданной уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}&=1,\\ y&=b.\end{aligned}\right\}$$

Решение. Канонические уравнения образующих конуса как прямых, проходящих через точку $O(0;\ 0;\ 0)$ и через точку $M(x;\ y;\ z)$ направляющей, имеют вид

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}.$$

Исключим x, y, z из данных уравнений. Заменяя y через b, определим из последних двух уравнений x и z:

$$x=b\frac{X}{Y},\quad z=b\frac{Z}{Y}.$$

Подставляя эти значения в первое из уравнений направляющей, получим

$$\frac{b^2}{a^2}\frac{X^2}{Y^2}+\frac{b^2}{c^2}\frac{Z^2}{Y^2}=1$$

или

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=0.$$

Переходя к заданным обозначениям, находим

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Упражнения

1. Найти уравнение конической поверхности с вершиной в начале координат и направляющей $x^2+y^2=a^2$, $z=c$,

Отв. $\frac{x^2+y^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2}$.

2. Найти уравнение конической поверхности с вершиной в начале координат и направляющей $x^2+(y-6)^2+z^2=25$, $y=3$.

Отв. $9(x^2+z^2)=16y^2$.

3. Показать, что уравнение $z^2=xy$ определяет конус с вершиной в начале координат.

ГЛАВА VI

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

К понятию функции можно прийти, изучая соотношения, возникающие между разными величинами. С понятием величины взаимосвязано и понятие о ее изменяемости, т. е. всякую величину, например, длину линии, площадь, объем, силу и т. д., можно рассматривать как величину переменную, принимающую различные значения.

Переменной величиной называется такая величина, которая способна принимать различные значения в условиях данного процесса. Если же в данном процессе переменная величина не изменяется, а сохраняет одно определенное значение, то такую постоянную величину называют *параметром*. Парабола с вершиной в начале координат, симметричная относительно оси абсцисс, определяется уравнением $y^2 = 2px$. В этом уравнении величины x и y являются переменными. Параметр p — величина постоянная, если речь идет об одной и той же параболе. Если же в одинаковых условиях рассматривается несколько различных парабол, то величина p является переменной. Величина π, являющаяся отношением длины окружности к диаметру, всегда постоянная величина. Постоянной является также сумма внутренних углов треугольника, равная $2d$, и некоторые другие величины, которые не являются параметрами.

Переменные величины обычно обозначаются последними буквами латинского алфавита: x, y, z, u, v, w, а постоянные — первыми буквами: a, b, c, ...

Предметом изучения математического анализа являются переменные величины, рассматриваемые в их взаимной связи и зависимости. Изучение это проводится абстрактно, в отрыве от конкретного происхождения величин.

Совокупность всех значений, которые может принимать величина x, называется *областью изменения* переменной величины x. Если переменная x принимает все значения между действительными числами a и b, включая значения a и b, т. е. $a \leqslant x \leqslant b$, то такая область изменения называется *отрезком*, или *промежутком* и обозначается $[a, b]$. Если же переменная x принимает все значения между числами a и b, исключая значения a и b, т. е. $a < x < b$, то такая область изменения называется *интервалом* и обозначается (a, b). Если область изменения переменной x не ограничена с одной или обеих сторон, то в этом случае

говорят о *полубесконечном* или соответственно о *бесконечном интервале*. Так, при условии $x \geqslant a$ говорят, что x изменяется в полубесконечном интервале $[a, \infty)$. Условие $x \leqslant b$ означает, что x изменяется в полубесконечном интервале $(-\infty, b]$. Если же переменная x принимает любое действительное значение, то областью изменения переменной величины x является вся числовая ось или бесконечный интервал $(-\infty, \infty)$.

Зависимость между переменными величинами, при которой изменение одной величины влечет за собой изменение другой, называется *функциональной зависимостью*. Очевидно, что одна из двух переменных величин, связанных функциональной зависимостью, является заданной; ее называют *аргументом*, или *независимой переменной*. Другая же переменная величина, которая является следствием изменения первой, называется *функцией* или *зависимой переменной*. Обозначим множество числовых значений независимой переменной x через X. Иначе говоря, X есть область изменения независимой переменной x. Если каждому значению независимой переменной x из множества X по некоторому закону поставлено в соответствие одно или несколько значений переменной y, то говорят, что переменная y является функцией от x. Множество X называется *областью определения* (*или существования*) функции y. Областью определения функции может быть любое множество точек числовой оси, но чаще всего рассматривают функции, областями определения которых служат области двух типов:

1) множество целых неотрицательных точек числовой оси. В этом случае имеем функцию целочисленного аргумента;

2) один или несколько интервалов числовой оси. В этом случае имеем функцию непрерывного аргумента.

Пример 1. Найти область определения функции

$$y = \sqrt[4]{6x - x^2 - 5}.$$

Решение. Очевидно, должно иметь место неравенство $6x - x^2 - 5 \geqslant 0$, преобразуя которое получаем $(x-1)(x-5) \leqslant 0$. Последнее неравенство выполняется, если

$$\left.\begin{array}{l} x-1 \geqslant 0, \\ x-5 \leqslant 0 \end{array}\right\} \quad \text{или} \quad \left\{\begin{array}{l} x-1 \leqslant 0, \\ x-5 \geqslant 0. \end{array}\right.$$

Из первой системы неравенств получаем

$$\left.\begin{array}{l} x \geqslant 1, \\ x \leqslant 5, \end{array}\right\}$$

откуда $1 \leqslant x \leqslant 5$.

Из второй системы неравенств получаем $x \leqslant 1$ и $x \geqslant 5$, т. е. несовместную систему. Следовательно, областью определения данной функции является отрезок $[1, 5]$.

Пример 2. Найти область определения функции $y = \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4}$.

Решение. Очевидно, что справедливо неравенство

$$x^2-3x-4\neq 0, \text{ или } (x+1)(x-4)\neq 0.$$

Отсюда следует, что $x\neq -1$ и $x\neq 4$. Следовательно, областью определения данной функции является совокупность интервалов $(-\infty, -1)$, $(-1, 4)$, $(4, +\infty)$.

Упражнения

1. Найти область определения функции $y=\sqrt[3]{x^4+5}$.
   Отв. $(-\infty, +\infty)$.
2. Найти область определения функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^4-16}}$.
   Отв. $(-\infty, -2)$; $(2, +\infty)$.
3. Найти область определения функции $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$.
   Отв. $[1, 4]$
4. Найти область определения функции $y=\sqrt{\sin x}$.
   Отв. $[2n\pi, (2n+1)\pi]$, где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.
5. Найти область определения функции $y=x-\operatorname{arctg} x$.
   Отв. $(-\infty, +\infty)$.

§ 2. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ

Если известно правило, позволяющее каждому из возможных значений аргумента поставить в соответствие определенное значение функции, то эта функция считается *заданной*. Наиболее употребительны три способа задания функции: табличный, графический и аналитический.

Табличный способ состоит в том, что значения независимой переменной и соответствующие значения функции, заранее подсчитанные, располагаются в виде таблицы. Например, при изучении зависимости изменения температуры кипения воды от изменения атмосферного давления была получена следующая таблица.

Таблица 2

p, мм	300	350	400	450	500	550	600	650	700
$t°$, С	75,8	79,6	83,0	85,9	88,7	91,2	93,5	95,7	97,7

Температура является функцией давления, и приведенная таблица дает значения этой функции для указанных значений независимой переменной.

Кроме того, известны таблицы логарифмов, таблицы тригонометрических функций и т. п.

Задание функции с помощью таблицы удобно тем, что в ней даны готовые значения функции. Недостаток табличного задания функции заключается в отсутствии возможности полностью проана-

лизировать свойства изучаемой функции, поскольку в этом случае функция задана не полностью, т. е. в таблице помещены значения функции, которые отвечают ограниченным значениям аргумента, для которых составлена таблица. Например, представленная таблица не отвечает на вопрос, какова температура кипения воды при атмосферном давлении меньше 300 *мм рт. ст.* или больше 700 *мм рт. ст.* Точно так же по таблице нельзя узнать значение температуры при давлениях 324 *мм рт. ст.* и 621 *мм рт. ст.*, прямо не указанных в числе значений давления. Однако в последнем случае можно воспользоваться специальными методами вычислительной математики.

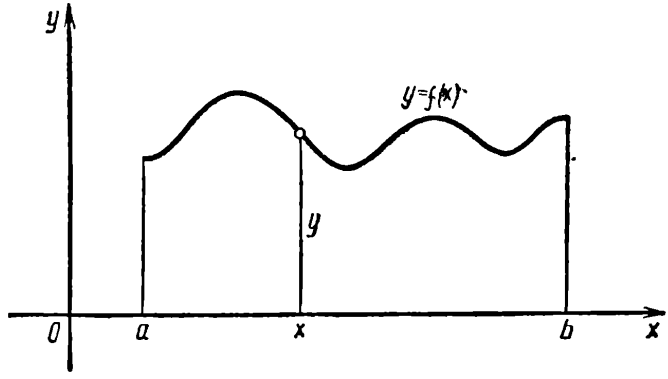

Рис. 6.1

Графический способ состоит в том, что зависимость между величинами x и y изображается в виде некоторой кривой на плоскости — графика с заданной системой координат. Геометрическое место точек на плоскости, абсциссы которых являются значениями аргумента, а ординаты — соответствующими значениями функции, называется *графиком функции*. Чтобы получить числовое значение функции, соответствующее определенному значению аргумента x, достаточно измерить величину ординаты точки кривой с абсциссой x (рис. 6.1). Всякая линия на плоскости изображает некоторую функцию, значения которой равны ординатам точек линии при значениях независимой переменной, равных абсциссам. Итак, понятия линии и функции очень тесно связаны между собой. Иногда графический способ задания функции является единственно возможным. Например, при использовании приборов, автоматически записывающих изменение одной величины в зависимости от изменения другой (барограф, термограф и др.). Преимуществом графического способа задания функции является его наглядность. Возрастание и убывание функции $y=f(x)$, моменты обращения ее в нуль и т. п. непосредственно видны на графике. Недостатком этого способа, равно как и табличного, является невозможность применения аппарата математического анализа.

Аналитический способ задания функции состоит в том, что функциональную зависимость между переменными x и y записывают в виде математической формулы. Например, $l=2\pi r$;

$s=\frac{gt^2}{2}$; $y=\frac{x^3-3x}{x^5+6}$. Здесь указаны действия, которые надлежит произвести над значением аргумента, для получения соответствующих значений функции. Аналитический способ задания функции является наиболее совершенным, так как к нему применимы методы математического анализа, которые позволяют полностью исследовать функции, а в случае необходимости построить для нее график и таблицу. Недостатками аналитического метода являются его недостаточная наглядность и необходимость в большом количестве вычислений.

Символически функциональная зависимость переменной величины y от аргумента x выражается так: $y=f(x)$ (читается: «y равно эф от x»). Здесь f — начальная буква латинского слова functio — функция. Вместо f часто употребляются и другие буквы латинского и греческого алфавитов: $F(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\Phi(x)$. Для известных и наиболее часто употребляемых функций применяют специальные символы: $\lg x$, $\cos x$, $\arcsin x$ и т. д. Символ f при аналитическом задании функции указывает совокупность математических действий, которые нужно произвести над x, чтобы получить y, а также порядок выполнения этих действий.

Чтобы найти частное значение функции, надо вместо независимой переменной в выражение функции подставить соответствующее значение аргумента. Например, если частное значение функции $y=f(x)$ при $x=b$ равно a, то это записывается так: $a=f(b)$. Очевидно, что частное значение функции является числом. Целочисленный аргумент в отличие от непрерывного (x) обозначают буквой n. Функция целочисленного аргумента обозначается аналогично функции непрерывного аргумента с индексом, указывающим на соответствующее значение целочисленного аргумента. Например, $y_n=f(n)$ или $y_1=f(1)$, $y_2=f(2)$, ... Значения y_1, y_2, ..., y_n образуют последовательность. Таким образом, если задана последовательность, то это означает, что каждому целому неотрицательному значению n поставлено в соответствие значение $y_n=f(n)$.

Пример 1. Пусть $f(x)=\lg\operatorname{tg}x$. Найти значения $f(\pi/6)$, $f(\pi/4)$, $f(\pi/3)$.

Решение. Так как под символом $f(x)$ понимается функция $\lg\operatorname{tg}x$, то $f(\pi/6)$ означает число

$$\lg\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\approx\lg\frac{\sqrt{3}}{3}\approx\lg 0{,}5773\approx-0{,}2386.$$

Аналогично,

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lg\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=\lg 1=0,$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\lg\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\approx\lg\sqrt{3}\approx\lg 1{,}7321\approx 0{,}2386.$$

Пример 2. Показать, что $f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$, если $f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$.

Решение. Найдем $f(y)$ и $f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$:

$$f(y)=\lg\frac{1+y}{1-y},$$

$$f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)=\lg\frac{1+\frac{x+y}{1+xy}}{1-\frac{x+y}{1+xy}}=\lg\frac{1+xy+x+y}{1+xy-x-y}.$$

Далее, найдем $f(x)+f(y)$:

$$f(x)+f(y)=\lg\frac{1+x}{1-x}+\lg\frac{1+y}{1-y}=\lg\left(\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1+y}{1-y}\right)=\lg\frac{1+x+y+xy}{1-x-y+xy}.$$

Сравнивая выражения, полученные для $f(x)+f(y)$ и $f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$, видим, что, действительно, $f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$.

§ 3. КЛАССИФИКАЦИЯ ФУНКЦИЙ

Согласно определению понятия функции каждому значению аргумента x соответствует одно определенное значение функции. Однако в некоторых случаях целесообразно обобщить понятие функции, допуская, что данному значению аргумента соответствует не одно, а два или большее количество значений функции.

Если каждому из значений, которые может принимать аргумент, соответствует только одно значение функции, то функция называется *однозначной*; если два или более значений функции, то *многозначной*. Например, $y=x^2$, $y=\lg x$—однозначные функции, а функция $y=\sqrt{x}$—многозначная (двузначная, так как $y=\pm\sqrt{x}$). Если, говоря о функции, не упоминают об ее многозначности, то подразумевается, что функция однозначна. При изучении функций, заданных аналитически, предполагается, что в левой части равенства, определяющего функцию, стоит только y, а в правой—выражение, зависящее от x. Например,

$$y=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}},\quad y=\frac{2+\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt{x}}.$$

Явной называется функция, значения которой находятся из уравнения, связывающего x и y и разрешенного относительно y. Однако уравнение между двумя переменными, не разрешенное относительно какой-нибудь из них, может определить одну из этих переменных как функцию другой. Например, в уравнении окружности $x^2+y^2=4$ ординату y можно рассматривать как функцию абсциссы x. Эта функция задана в неявном виде. Чтобы задать ее в явном виде, достаточно разрешить уравнение относительно y: $y=\pm\sqrt{4-x^2}$. Однако переход от задания функции в неявном виде к заданию ее в явном виде не всегда прост, а иногда невозможен.

Неявной называется функция, значения которой находятся из уравнения, связывающего x и y и не разрешенного относительно y.

Функция называется *алгебраической*, если ее значения можно получить, производя над независимой переменной конечное число арифметических действий и возведений в степень с рациональным показателем. Например, $y=5x^3+6x^2-13$, $y=\frac{\sqrt{x}+2}{1-x^3}$ — алгебраические функции. Функция, не являющаяся алгебраической, называется *трансцендентной*. Примеры трансцендентных функций: $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{arctg}\frac{x}{1+x}$, $y=3^x$. Алгебраическая функция называется *рациональной*, если ее значения можно получить, производя над независимой переменной конечное число арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень с рациональным показателем). Так, например, $y=\dfrac{\frac{5}{x^3}-3x^2+\frac{1}{x}-6}{x-\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^2}-1}$ — рациональная функция.

Алгебраическая функция, не являющаяся рациональной, называется *иррациональной*. Например, $y=\frac{\sqrt[3]{x^2}+3}{x^3+4}$ — иррациональная функция. Рациональная функция называется *целой*, если ее значения можно получить, не производя деления на выражение, содержащее аргумент. Например, $y=5x^3-4x^2+3x-2$, $y=\left[\frac{3(x-2)^2+4}{10}-\frac{x^2}{3}\right]^3$ — целые рациональные функции. Целые рациональные функции называются *многочленами* (или *полиномами*), если в наиболее общем виде их можно записать так:

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n,$$

где a_0, a_1, a_2, ..., a_n — постоянные величины. Рациональная функция называется *дробной*, если она выражается дробью, числителем и знаменателем которой служат многочлены. Пример дробной рациональной функции:

$$y=\frac{2x^4+6x^3-7x^2+4}{x^4-x^3+x-2}.$$

Функция называется *четной*, если при изменении знака у аргумента значение функции остается без изменений, т. е.

$$f(-x)=f(x).$$

Примеры четных функций: $y=x^2$, $y=\cos x$. График четной функции симметричен относительно оси Oy. Функция называется *нечетной*, если при изменении знака у аргумента изменяется знак значения функций, а абсолютная величина этого значения остается без изменения, т. е.

$$f(-x)=-f(x).$$

Примеры нечетных функций: $y=x^3$, $y=\sin x$, $y=\operatorname{tg} x$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат. Функция называется *возрастающей в интервале*, если бо́льшему

значению аргумента соответствует большее значение функции. Например, функция $y=3^x$ — возрастающая на всей числовой оси. Функция называется *убывающей в интервале*, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Например, функция $y=x^2$ — убывающая в интервале $(-\infty, 0)$. Интервалы возрастания и убывания функции называют *интервалами монотонности* функции, а функцию в этом интервале — *монотонной функцией*. Интервалы монотонности функции дают представление о поведении функции в интервале.

Упражнения

1. Показать, что функция $y=2x^4$ — четная.
2. Показать, что функция $y=\frac{1}{x}$ — нечетная.
3. Показать, что функция $y=\frac{x^2}{1+x^2}$ — четная.
4. Выяснить, является ли функция $y=\frac{x+1}{x-1}$ четной или нечетной.

Отв. Функция не является ни четной, ни нечетной.

5. Показать, что сумма или разность двух четных функций есть функция четная.
6. Показать, что произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная.

§ 4. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ. ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

Среди бесконечного множества функций наиболее простой является функция вида

$$y=kx+b, \tag{6.1}$$

где k и b — постоянные. Эта функция называется *линейной*.

Графиком линейной функции является прямая линия. Линейная функция определена на всей числовой оси.

Если $b=0$, то уравнение (6.1) преобразуется к виду

$$y=kx, \tag{6.2}$$

где k — постоянная ($k\neq 0$). Зависимость, выраженная формулой (6.2), называется *прямой пропорциональной зависимостью*. Постоянная величина k называется *коэффициентом пропорциональности*. Графиком прямой пропорциональной зависимости является прямая линия, проходящая через начало координат. При $k>0$ линейная функция монотонно возрастает на всей оси Ox; при $k<0$ линейная функция является монотонно убывающей.

Обратной пропорциональной зависимостью называется зависимость вида

$$y=\frac{k}{x}, \tag{6.3}$$

где k — постоянная ($k\neq 0$). Постоянная величина k в этом случае называется *коэффициентом обратной пропорциональности*. Харак-

терной особенностью обратно пропорциональной зависимости является то обстоятельство, что с изменением одной из переменных другая изменяется в обратном отношении. Графиком обратной пропорциональности является равнобочная гипербола, асимптотами которой служат оси координат. Обратная пропорциональная зависимость есть частный случай зависимости, устанавливаемой дробно-линейной функцией вида

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}, \tag{6.4}$$

где a, b, c, d — постоянные ($c\neq 0$). Графиком дробно-линейной функции является равнобочная гипербола с асимптотами $x=-\frac{d}{c}$ и $y=\frac{a}{c}$, параллельными осям координат.

Квадратичной функцией называется функция вида

$$y=ax^2+bx+c,$$

где a, b, c — постоянные ($a\neq 0$). Квадратичная функция определена на всей оси абсцисс. Графиком квадратичной функции является парабола, ось которой параллельна оси Oy, а вершина лежит в точке O'. При $a>0$ ветви параболы направлены вверх, при $a<0$ — вниз (рис. 6.2). Раствор параболы тем больше, чем меньше абсолютное значение коэффициента a. При параллельном смещении осей координат, т. е. при перенесении начала системы в точку $A(x_1; y_1)$, уравнение квадратичной функции сводится к видам:

1) $(y-y_1)^2=2p(x-x_1)$ с осью симметрии $y=y_1$ и с вершиной $A(x_1; y_1)$;

2) $(x-x_1)^2=2p(y-y_1)$ с осью симметрии $x=x_1$ и с вершиной $A(x_1; y_1)$.

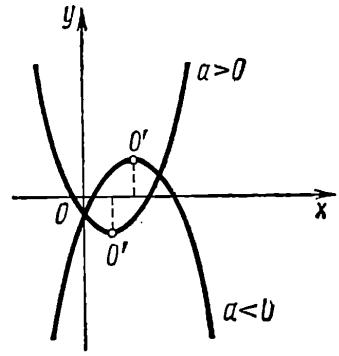

Рис. 6.2

Здесь x_1, y_1 — текущие координаты новой системы. Тогда уравнение квадратичной функции принимает вид $Y^2=2pX$ или $X^2=2pY$, где $X=x-x_1$, $Y=y-y_1$. При преобразованиях подобного вида определяются сразу параметр параболы p, координаты вершины и фокуса параболы, а также уравнение директрисы. Указанные преобразования четко связывают уравнение квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$, графиком которой является парабола, с каноническими уравнениями параболы.

§ 5. ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

Пусть дана функция

$$y=f(x). \tag{6.5}$$

Если в этой функциональной зависимости переменную y рассматривать как независимую переменную, а переменную x — как зави-

симую переменную или функцию, то

$$x = \varphi(y). \qquad (6.6)$$

Уравнения (6.5) и (6.6) в одной и той же системе прямоугольных координат определяют одну и ту же линию, однако для функции $y = f(x)$ аргумент откладывается по оси Ox, а для функции $x = \varphi(y)$ — по оси Oy. Функциональные зависимости, определяемые уравнениями (6.5) и (6.6), различны. Функция $x = \varphi(y)$ называется *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$.

Введем для обратной функции такое же обозначение аргумента и функции, как для данной, т. е.

$$y = \varphi(x) \qquad (6.7)$$

(именно так и записывают функцию, обратную к заданной). В одной и той же системе координат графики данной функции $y = f(x)$ и обратной функции $y = \varphi(x)$ изображаются в виде двух кривых, симметричных относительно прямой $x = y$, т. е. биссектрисы I и III координатных углов (рис. 6.3). Например, строя график функции $y = f(x)$, положим $x = a$. Соответствующее значение $y = f(a)$ обозначим через b. При построении обратной функции $y = \varphi(x)$ положим $x = b$, тогда найдем, что соответствующее значение обратной функции $y = \varphi(b)$ равно именно a, т. е. $\varphi(b) = a$.

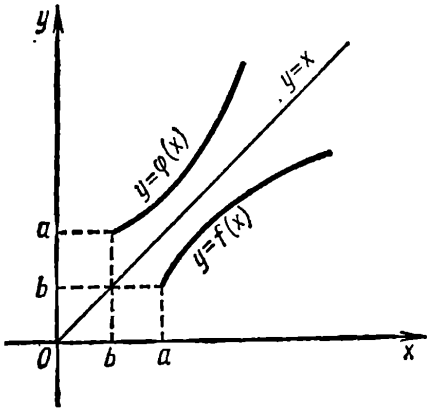

Рис. 6.3

Заметим, что точки с координатами $(a; b)$ и $(b; a)$, принадлежащие соответственно линиям $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$, расположены симметрично относительно прямой $y = x$. Легко проверить, что функция, обратная линейной, также линейна, а функция, обратная дробно-линейной, также дробно-линейна. Если данная функция однозначна и монотонна, то и обратная ей функция однозначна и монотонна. Однако обратная функция может быть и многозначной. Например, функция $y = x^2$ — однозначна, а ей обратная функция $y = \pm\sqrt{x}$ — двузначна.

Упражнения

1. Найти функцию, обратную функции $y = 2x + 3$. Какова область определения обратной функции?

Отв. $x = \frac{y-3}{2}$; $(-\infty, +\infty)$.

2. Найти функцию, обратную функции $y = \lg\frac{x}{2}$. Какова область определения обратной функции?

Отв. $x = 2 \cdot 10^y$; $(-\infty, +\infty)$.

§ 6. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

При построении множества различных функций за основу берут группу так называемых *основных элементарных функций*, к которым относятся: степенная функция; показательная функция; логарифмическая функция; тригонометрические функции; обратные тригонометрические функции. Рассмотрим основные элементарные функции.

Степенная функция. *Степенной функцией* называется функция вида

$$y = x^n,$$

где n — любая постоянная величина.

Функцию вида

$$y = ax^n,$$

где a и n — постоянные, также называют степенной. Области существования степенных функций различны при различных значениях n. Для функций $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$ и т. д. область существования есть бесконечный интервал $(-\infty, \infty)$; для функций $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^3}$, $y = \frac{1}{x^4}$ и т. д. — интервал $(-\infty, \infty)$, за исключением точки $x = 0$. Для функции $y = x^{4/3}$ область существования есть бесконечный интервал $(-\infty, \infty)$, а для функции $y = x^{3/4}$ — полубесконечный интервал $[0, \infty)$. Для функции $y = x^{1/2}$ область существования есть полубесконечный интервал $[0, \infty)$, а для функции $y = x^{-1/2}$ — интервал $(0, \infty)$. Для функции $y = x^{-1/3}$ область существования есть бесконечный интервал $(-\infty, \infty)$, за исключением точки $x = 0$. Область определения любой степенной функции принадлежит к одному из рассмотренных выше четырех видов. Поведение степенных функций существенно различно при $n > 0$ (рис. 6.4) и $n < 0$ (рис. 6.5). Графики степенных функций при $n > 0$ проходят через точки (0; 0) и (1; 1) и разделяются прямой $y = x$ на два типа: обращенные выпуклостью вниз ($n > 1$) и обращенные выпуклостью вверх ($n < 1$). Графики степенных функций при $n > 0$ являются параболами соответствующих порядков. Например, $y = x^3$ — кубическая парабола, $y = x^4$ — парабола четвертого порядка, $y = x^{3/2}$ — полукубическая парабола. Графики степенных

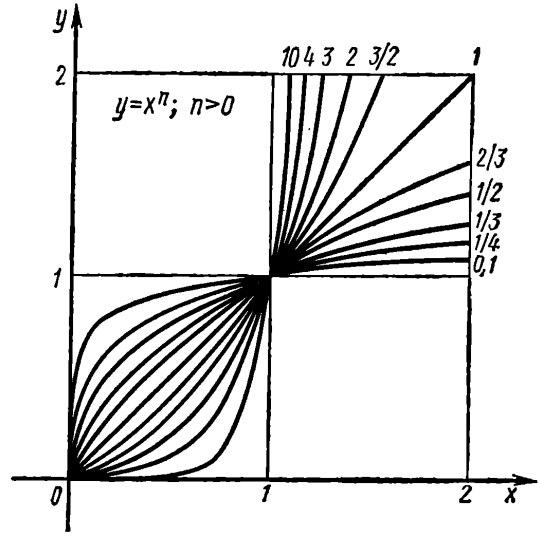

Рис. 6.4

функций при $n < 0$ проходят через точку (1; 1) и являются гиперболами соответствующих порядков. Например, $y = \frac{1}{x^2}$ — гипербола второго порядка. При $n = -1$ имеем обычную равнобочную гиперболу.

Показательная функция. *Показательной функцией* называется функция вида

$$y = a^x,$$

где a — любое постоянное положительное число, отличное от единицы. Величина a называется *основанием* показательной функции.

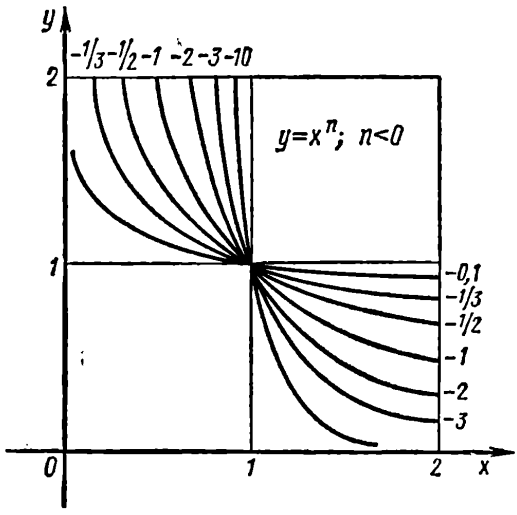

Рис. 6.5

При $a = 1$ функция $y = a^x$ есть постоянная, равная единице. Областью существования любой показательной функции является бесконечный интервал $(-\infty, \infty)$. Поведение показательных функций различно при $a > 1$ и при $a < 1$ (рис. 6.6). Графики показательных функций проходят через точку (0; 1) и всегда $a^x > 0$, т. е. графики расположены над осью Ox, которая служит для них асимптотой. Они монотонны на всем бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$, причем при $a > 1$ линии возрастают, а при $a < 1$ — убывают (рис. 6.6). График показательной функции с основанием a симметричен относительно оси Oy графику показательной функции с основанием $\frac{1}{a}$.

Часто приходится иметь дело с показательной функцией, основанием которой является некоторое число e ($e = 2{,}71828...$), играющее особо важную роль в математическом анализе. Функция $y = e^x$ называется *экспоненциальной*, а ее график — *экспонентой*.

Логарифмическая функция. *Логарифмической функцией* называется функция вида $y = \log_a x$, где a — любое постоянное положительное число, отличное от единицы. Величина a называется *основанием* логарифмической функции. Областью существования любой логарифмической функции является интервал $(0; \infty)$. Поведение логарифмических функций различно при $a > 1$ и $a < 1$ (рис. 6.7). Графики логарифмических функций проходят через точку (1; 0) и имеют асимптотой ось Oy. Они монотонны в полубесконечном интервале $(0, \infty)$, причем при $a > 1$ логарифмическая функция возрастает, а при $a < 1$ — убывает. График логарифмической функции с основанием a симметричен относительно оси Ox графику

логарифмической функции с основанием $\frac{1}{a}$. Линии, являющиеся графиками логарифмических функций, называются *логарифмиками*. Логарифмическая функция является обратной по отношению к показательной функции. Поэтому график логарифмической функции можно получить, если график показательной функции, изображенный на рис. 6.6, перегнуть по биссектрисе I и III координатных углов. Известно, что логарифмы всех чисел при одном основании получаются из логарифмов тех же чисел при другом основании с помощью умножения на постоянное число (модуль перехода), т. е.

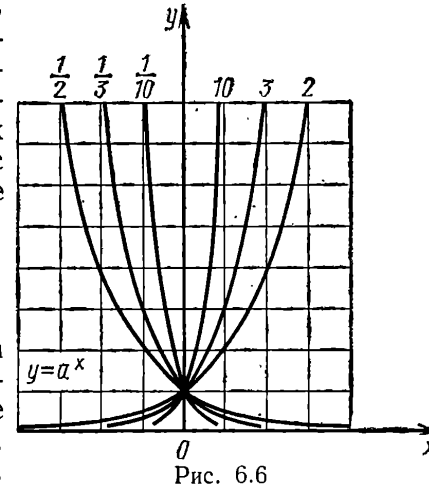

Рис. 6.6

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Следовательно, одна логарифмика переходит в другую посредством увеличения или уменьшения всех ее ординат в одно и то же число раз.

Тригонометрические функции. *Тригонометрическими функциями* называются функции, определяемые формулами $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$. В качестве независимой переменной в тригонометрических функциях принимается радианная мера угла: 1 радиан $= 57°18'$ или $1° \approx 0{,}01745$ радиана. Таким образом, в каждой из формул тригонометрических функций буквы x и y обозначают некоторые числа. Между тригонометрическими функциями существуют пять простых независимых алгебраических соотношений, выводимых на основании определений этих функций и позволяющих по одной из них находить остальные. Для функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ областью существования служит бесконечный интервал $(-\infty, \infty)$ (рис. 6.8). Для функций $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 6.9). и $y = \sec x$ (рис. 6.10) область существования есть бесконечный интервал $(-\infty, \infty)$, за исключением точек $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, $\pm\frac{5\pi}{2}$, ...

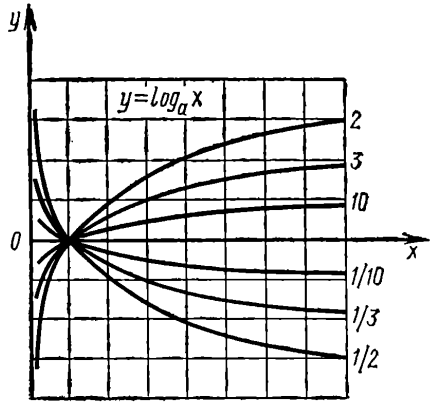

Рис. 6.7

Для функций $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 6.9) и $y = \operatorname{cosec} x$ (рис. 6.10) область существования есть бесконечный интервал $(-\infty, \infty)$, за исключением точек 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, ... Почти все тригонометрические функции имеют период, равный 2π, т. е. при увеличении аргумента на число, кратное 2π, значение функции остается неизменным. Об

этом свидетельствуют известные формулы приведения. Функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ имеют период, равный π.

Линия, изображающая функцию $y = \sin x$, называется *синусоидой*, а линия, изображающая функцию $y = \operatorname{tg} x$,— *тангенсоидой*. Графики функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$ и $y = \operatorname{cosec} x$ имеют вертикальные асимптоты, проходящие через точки, в которых указанные функции не существуют.

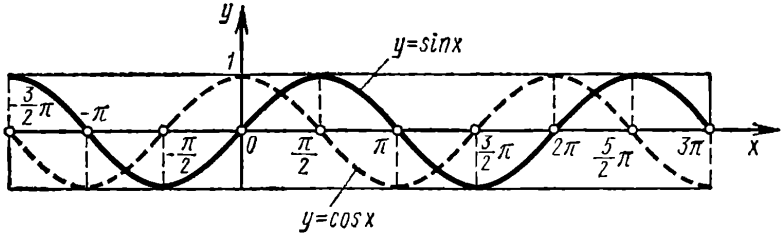

Рис. 6.8

Обратные тригонометрические функции. *Обратными тригонометрическими* функциями называются функции, определяемые формулами

$$y = \arcsin x,\ y = \arccos x,\ y = \operatorname{arctg} x,\ y = \operatorname{arcctg} x.$$

Они являются обратными функциям $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ соответственно. Графики обратных тригонометрических функций можно получить по общему правилу, построив линии, симметричные относительно биссектрисы I и III координатных углов с графиками соответствующих тригонометрических функций.

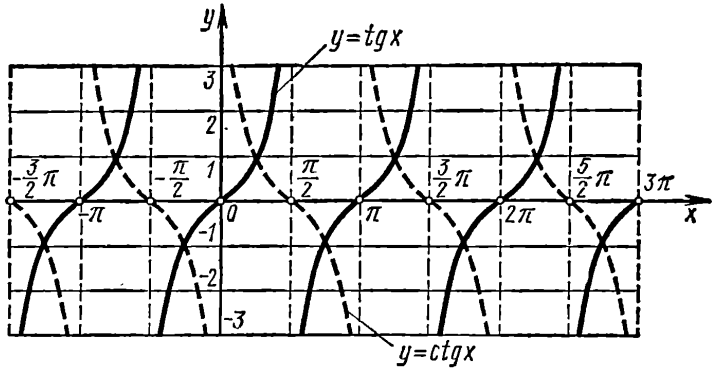

Рис. 6.9

Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$. Функция $y = \sin x$ определена в бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$. Значения функции $y = \sin x$ заполняют отрезок $[-1, 1]$. Прямая, параллельная оси Ox, пересекает синусоиду, т. е. график функции $y = \sin x$ (см. рис. 6.8) в бесконечном множестве точек. Иначе говоря, каждому значению y из отрезка $[-1, 1]$ отвечает бесконечное множество значений x. Поэтому функция $y = \arcsin x$ является многозначной.

Для того чтобы каждому значению x на отрезке $[-1, 1]$ поставить в соответствие единственное значение функции $y=\arcsin x$, обычно вводят дополнительное условие. Потребуем, чтобы величина y находилась на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, т. е. $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Тогда каждому значению x из отрезка $[-1, 1]$ будет соответствовать единственное значение y, лежащее на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

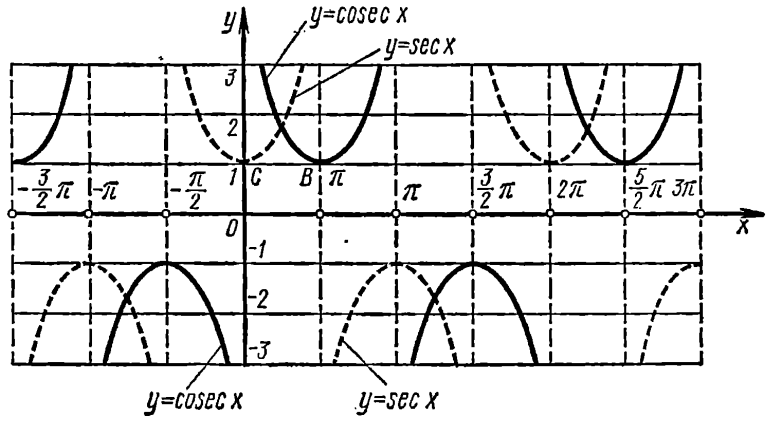

Рис. 6.10

Полученную однозначную функцию $y=\arcsin x$ называют *главным значением арксинуса* (рис. 6.11). Аналогично вводят функцию $y=\arccos x$, обратную функции $y=\cos x$. Однозначность этой обратной функции будет обеспечена при дополнительном условии

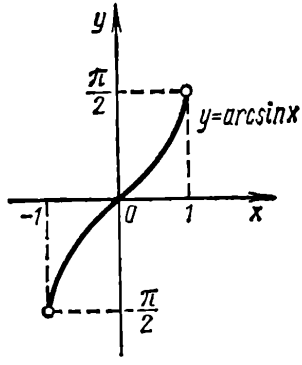

Рис. 6.11

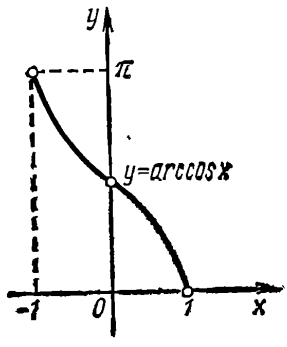

Рис. 6.12

$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$. Однозначную функцию $y=\arccos x$ называют *главным значением арккосинуса* (рис. 6.12). Функция $y=\arccos x$ связана с функцией $y=\arcsin x$ соотношением

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Функция $y=\operatorname{tg} x$ определена для всех значений x, кроме значений $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, где $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Значения функции $y=\operatorname{tg} x$

Таблица значений тригонометрических функций

α°	sin α	tg α	ctg α	cos α	
0	0,0000	0,0000	—	1,000	90
1	0175	0175	57,3	1,000	89
2	0349	0349	28,6	0,999	88
3	0523	0524	19,1	999	87
4	0697	0699	14,3	998	86
5	0,0872	0,0875	11,4	0,996	85
6	1045	1051	9,51	995	84
7	1219	1228	8,11	993	83
8	139	141	7,11	990	82
9	156	158	6,31	988	81
10	0,174	0,176	5,67	0,985	80
11	191	194	5,145	982	79
12	208	213	4,705	978	78
13	225	231	4,331	974	77
14	242	249	4,011	970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	276	287	487	961	74
17	292	306	271	956	73
18	309	325	3,078	951	72
19	326	344	2,904	946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	358	384	605	934	69
22	375	404	475	927	68
23	391	424	356	921	67
24	407	445	246	914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	438	488	2,050	899	64
27	454	510	1,963	891	63
28	469	532	881	883	62
29	485	554	804	875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	515	601	664	857	59
32	530	625	600	848	58
33	545	649	540	839	57
34	559	675	483	829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	588	727	376	809	54
37	601	754	327	799	53
38	616	781	280	788	52
39	629	810	235	777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	656	869	150	755	49
42	669	900	111	743	48
43	682	933	072	731	47
44	695	966	036	719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
	cos α	ctg α	tg α	sin α	α°

Таблица 4

Таблица перевода градусов в радианы

1 радиан = 57°17′45″

α градусов	1	2	3	4	5	6	7	8	9
α радианов	0,017	0,035	0,052	0,070	0,087	0,105	0,122	0,140	0,157

заполняют здесь бесконечный интервал $(-\infty, \infty)$. Прямая, параллельная оси Ox, пересекает тангенсоиду, т. е. график функции $y = \operatorname{tg} x$ (см. рис. 6.9) в бесконечном множестве точек. Иначе говоря, каждому значению y из бесконечного интервала $(-\infty, \infty)$ соответствует бесконечное множество значений x. Поэтому функция $y = \operatorname{arctg} x$ является многозначной. Однозначность этой обратной

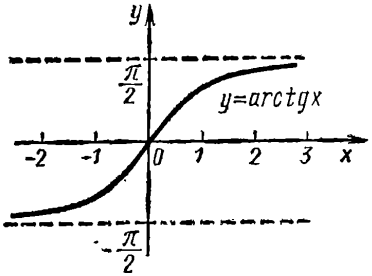

Рис. 6.13

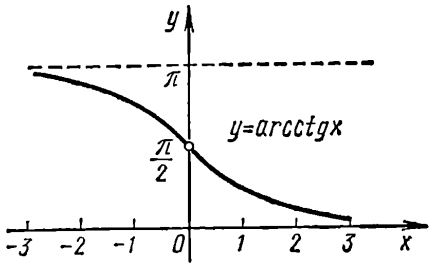

Рис. 6.14

функции будет обеспечена, если ввести следующее дополнительное условие: $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$. Полученную однозначную функцию $y = \operatorname{arctg} x$ называют *главным значением арктангенса* (рис. 6.13).

Аналогично можно ввести функцию $y = \operatorname{arcctg} x$, обратную функции $y = \operatorname{ctg} x$. Главное значение этой обратной функции (рис. 6.14) определяется дополнительным условием $0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$.

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ связана с функцией $y = \operatorname{arcctg} x$ очевидным соотношением

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Функции $y = \operatorname{arcsec} x$ и $y = \operatorname{arccosec} x$ встречаются значительно реже. В дальнейшем, если не будет особо оговорено, под обратными тригонометрическими функциями будем понимать их однозначные ветви, образованные главными значениями.

Рассмотренные выше основные элементарные функции могут соединяться между собой с помощью арифметических действий и новой операции взятия функции от функции или суперпозиции (наложения) нескольких функций. Пусть величина y выражена как некоторая функция от величины z: $y = f(z)$, а величина z есть в свою

очередь некоторая функция от переменной x: $z=\varphi(x)$. Очевидно, величина y является функцией переменной x, выраженной с помощью промежуточной переменной величины z. Действительно, значению x соответствует одно или несколько определенных значений z, а каждому из этих значений соответствует одно или несколько определенных значений y. Таким образом, одному значению переменной x соответствует одно или несколько значений величины y, т. е. величина y есть некоторая функция от x. Эта функция записывается в виде $y=F(x)=f[\varphi(x)]$ и называется *сложной функцией* от x. Все основные элементарные функции, а также сложные функции, построенные наложением основных, составляют класс элементарных функций.

Таким образом, элементарной функцией называется функция, которую можно задать одной формулой, составленной из основных элементарных функций и постоянных величин путем конечного числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции.

Пример. Сложную функцию $y=\sin u$, где $u=\ln v$, $v=\sqrt{x}$, записать в виде одного равенства.

Решение. Подставляя в функцию $u=\ln v$ значение v из $v=\sqrt{x}$, получим $u=\ln\sqrt{x}$. После подстановки полученного значения для u в функцию $y=\sin u$ данная сложная функция принимает вид $y=\sin(\ln\sqrt{x})$.

Упражнения

1. Зная график функции $y=x^3$, построить графики следующих функций:
а) $y=-x^3$; б) $y=(x-1)^3$; в) $y=-(x+2)^3$; г) $y=-x^3+3$.

2. Построить график функции $y=2^x$. Считая этот график исходным, построить графики следующих функций:
а) $y=2^{-x}$; б) $y=-2^x$; в) $y=-2^{-x}$.

3. Построить график функции $y=\lg x$. Считая этот график исходным, построить графики следующих функций:

а) $y=\lg x^2$; б) $y=\lg(x-1)$; в) $y=\lg\dfrac{1}{x}$.

4. Считая известными графики функций $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, построить графики следующих функций:

а) $y=\sin(x-1)$; б) $y=\cos(x+2)$; в) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}x$; г) $y=\operatorname{ctg} 2x$.

5. Зная графики функций $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$, построить графики следующих функций:

а) $y=\arcsin(x-1)$; б) $y=\arccos\left(\dfrac{x}{3}+1\right)$; в) $y=-\operatorname{arctg} x$; г) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{arcctg} x$.

6. Сложную функцию $y=\operatorname{arctg} u$, $u=\sqrt{v}$, $v=\lg x$ записать в виде одного равенства.

Ответ. $y=\operatorname{arctg}(\sqrt{\lg x})$.

7. Сложную функцию $y=\lg\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ записать в виде цепи равенств.

Ответ. $y=\lg u$, $u=\operatorname{tg} v$, $v=\dfrac{x}{2}$.

ГЛАВА VII

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

§ 1. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Пусть функция $y=f(x)$ определена в окрестности некоторой точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, в которой функция определена или нет. Пусть независимая переменная x неограниченно приближается к числу x_0, т. е. переменная x принимает значения, сколь угодно близкие к x_0, но не равные x_0. Символически это обозначается так: $x \longrightarrow x_0$ (читается: x стремится к x_0). Зависимая переменная y принимает соответствующие значения, равные некоторому числу A. В этом случае говорят, что число A есть предел функции $y=f(x)$ при $x \longrightarrow x_0$, или, иначе, при $x \longrightarrow x_0$ функция $y=f(x)$ стремится к числу A. Число A называется *пределом функции* $y=f(x)$ при $x \longrightarrow x_0$, если для всех значений x, сколько угодно мало отличающихся от числа x_0, соответствующие значения функции $f(x)$ как угодно мало отличаются от числа A. Символически это записывается так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Точка x_0, к которой стремится независимая переменная x, называется *предельной точкой*. Совершенно не обязательно, чтобы функция была задана в предельной точке, достаточно задать ее лишь в окрестности этой точки. Отыскание предела функции, которая определена в окрестности некоторой точки x_0 (но не в самой точке), составляет одну из важнейших задач теории пределов.

Чтобы вычислить предел A функции $y=f(x)$, зададим сколь угодно малое положительное число ε. Если для этого числа можно подобрать такое положительное число δ, что для всех x (кроме x_0), удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, будет справедливо также неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$, то число A есть предел функции $f(x)$ при $x \longrightarrow x_0$.

Пример 1. Показать, что функция $y=2x+1$ имеет предел, равный 5 при $x \longrightarrow 2$.

Решение. Рассмотрим разность между выражением $2x+1$ и числом 5. Преобразуя эту разность, получим

$$|(2x+1)-5| = |2x-4| = |2(x-2)| = 2|x-2|.$$

Зададим положительное число ε. Для того чтобы имело место неравенство $|(2x+1)-5|<\varepsilon$, необходимо, чтобы было выполнено неравенство $|x-2|<\frac{\varepsilon}{2}=\delta$. Очевидно, что для всех x, отличающихся от 2 меньше, чем на $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, функция $y=2x+1$ будет отличаться от 5 меньше, чем на ε, и, следовательно, согласно определению, функция $x=2x+1$ имеет предел, равный 5, при $x \longrightarrow 2$.

В дальнейшем будут приведены простые правила для отыскания пределов функции. Понятие предела геометрически проиллюстрировано на рис. 7.1. Восстановим в точке $x = x_0$ к оси Ox и в точке A к оси Oy перпендикуляры, продолжив их до пересечения в точке N. Зададим произвольное положительное число ε. Очевидно, тогда найдется такая δ-окрестность точки $x = x_0$, что часть графика функции $y = f(x)$, соответствующая этой окрестности, будет содержаться в полосе, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$. Необходимо отметить следующее обстоятельство: при $x \to x_0$ функция имеет только один предел, так как при $x \to x_0$ значения функции не могут стремиться к двум и более разным постоянным числам, а должны быть как угодно близки к одному какому-то постоянному числу. Функция, стремясь или приближаясь к своему пределу, не обязательно должна оставаться меньше его, а может в своем приближении принимать значения и большие и равные ему, т. е. она как бы «колеблется» вокруг своего предела. Чтобы иметь возможность говорить о всех этих случаях сразу, употребляют понятие абсолютной величины. Предел постоянной величины B, рассматриваемой как функция некоторого аргумента, равен самой величине B: $\lim\limits_{x \to x_0} B = B$. Действительно, разность $B - B$ равна нулю и, следовательно, всегда меньше любого наперед заданного положительного числа. Функция $y = x$ при $x \to x_0$ имеет предел, равный x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$. Действительно, неравенство $|x - x_0| < \varepsilon$ справедливо для всех x, принадлежащих ε-окрестности точки x_0. В данном случае $\delta = \varepsilon$.

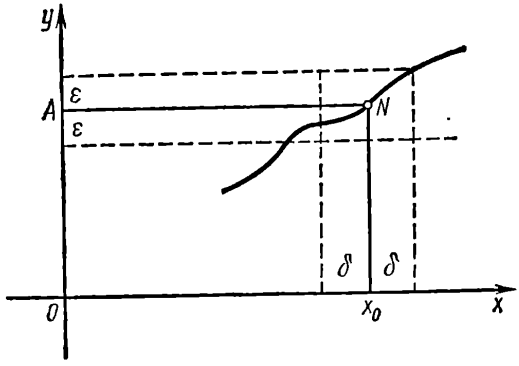

Рис. 7.1

Рассмотрим теперь понятие предела функции в случае, если аргумент x в своем изменении неограниченно возрастает или убывает. Это означает, что x стремится к положительной бесконечности ($x \to +\infty$) или к отрицательной бесконечности ($x \to -\infty$). В первом случае x принимает значения, бо́льшие любого наперед заданного положительного числа, а во втором — меньшие любого наперед заданного отрицательного числа. Аргумент, изменяющийся указанным образом, называется *бесконечно большим аргументом*. Если при бесконечно большом аргументе соответствующие значения функции $f(x)$ неограниченно приближаются к некоторому числу A, то число A есть предел функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$.

Пусть $x \to +\infty$. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$, если для всех достаточно больших значений x соответствующие значения функции $f(x)$ сколь угодно мало отличаются от числа A. Символически это записывается так: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

Понятие предела (геометрически) в этом случае проиллюстрировано на рис. 7.2. Восстановим перпендикуляр в точке A к оси Oy. Зададим произвольное положительное число ε. Очевидно, найдется такое число N, что часть графика функции $y=f(x)$, соответствующая значениям x, большим этого числа, будет всегда содержаться в полосе, ограниченной прямыми $y=A-\varepsilon$ и $y=A+\varepsilon$. Как видно из рис. 7.2, функция $y=f(x)$, приближаясь к своему пределу, может убывать, возрастать или колебаться вокруг своего предельного значения. Пусть $x\to-\infty$. Число A называется *пределом функции* $y=f(x)$ *при* $x\to-\infty$, если для всех достаточно малых значений x

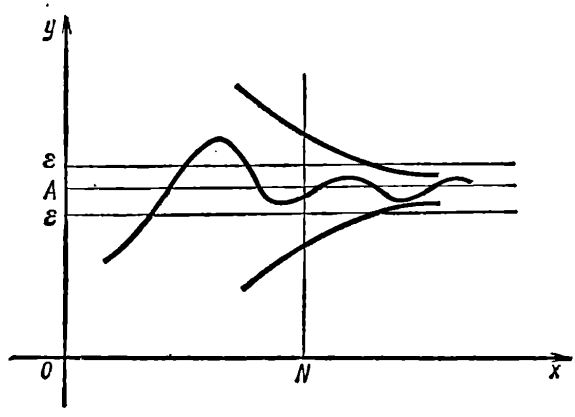

Рис. 7.2

соответствующие значения функции $f(x)$ сколь угодно мало отличаются от числа A. Символически это записывается так: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$. Геометрическая иллюстрация понятия предела в этом случае аналогична рассмотренному выше при $x\to+\infty$. Встречаются случаи, когда функция $f(x)$ при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ стремится к одному и тому же пределу A. Число A называется *пределом функции* $y=f(x)$ *при* $x\to\infty$, если для всех достаточно больших по абсолютной величине значений x соответствующие значения функции $f(x)$ сколь угодно мало отличаются от числа A. Символически это записывается так: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$. Геометрическая иллюстрация понятия предела в случае $x\to\infty$ представлена на рис. 7.3. В этом случае график функции $y=f(x)$ находится в полосе, ограниченной прямыми $y=A-\varepsilon$ и $y=A+\varepsilon$, где ε—сколь угодно малое положительное число, если только точки x достаточно удалены от точки $x=0$. Иначе, прямая $y=A$ является асимптотой графика функции $y=f(x)$ и при $x\to+\infty$, и при $x\to-\infty$. Чтобы вычислить предел A функции $f(x)$ при $x\to\infty$ зададим сколько угодно малое положительное число ε. Если всегда существует такое положительное число N, что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x|>N$, неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$ также справедливо, то число A есть предел функции $f(x)$ при $x\to\infty$.

Пример 2. Показать, что функция $y=\frac{x^2}{x^2+1}$ при $x \to \infty$ имеет предел, равный 1.

Решение. Пусть ε — любое положительное число. Требуется показать, что можно подобрать такое число $N>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x|>N$, выполняется неравенство

$$\left|\frac{x^2}{x^2+1}-1\right|<\varepsilon.$$

Если $|x|>N$, то $|x^2|>N^2$ и

$$\left|\frac{x^2}{x^2+1}-1\right|=\frac{1}{x^2+1}<\frac{1}{N^2+1}<\frac{1}{N^2}.$$

Следовательно, для выполнения неравенства $\left|\frac{x^2}{x^2+1}-1\right|<\varepsilon$ достаточно найти N из условия $1/N^2=\varepsilon$, т. е. $N=1/\sqrt{\varepsilon}$. Итак, для любого ε найдено такое N, что из неравенства $|x|>N$ следует неравенство $\left|\frac{x^2}{x^2+1}-1\right|<\varepsilon$. Таким образом, показано, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1$.

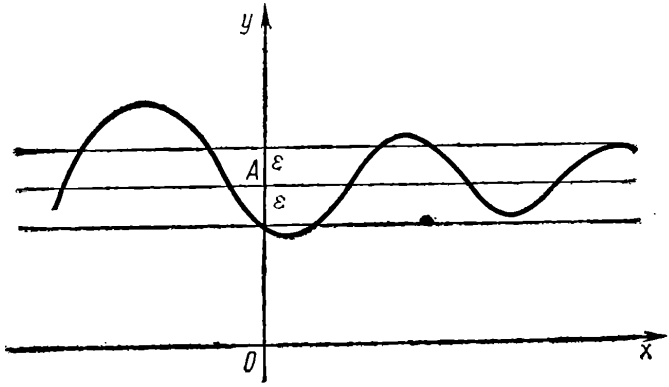

Рис. 7.3

Упражнения

1. Показать, что функция $y=2x-1$ при $x \to 2$ имеет предел, равный 3.
2. Показать, что функция $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ при $x \to 3$ имеет предел, равный 4/5.
3. Показать, что функция $y=\frac{x-1}{x+2}$ при $x \to \infty$ имеет предел, равный 1.
4. Показать, что функция $y=\frac{x-2}{2x}$ при $x \to \infty$ имеет предел, равный 1/2.

§ 2. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Рассмотрим предел функций целочисленного аргумента, т. е. функций, у которых область изменения аргумента есть совокупность всех натуральных чисел 1, 2, 3, ... Предел такой функции называют *пределом последовательности*. Совокупность значений y_1, y_2, y_3, ..., y_n, ... функции целочисленного аргумента называется *по-*

следовательностью, если эти значения следуют друг за другом в порядке возрастания аргумента. Значения $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$ называются *членами последовательности*. Всякая формула, выражающая n-й член последовательности через аргумент n, называется *формулой общего члена*. Символически функция целочисленного аргумента обозначается так: $y=f(n)$. Если с увеличением n значения $y_n=f(n)$ неограниченно приближаются к некоторому числу A, то число A есть предел функции $f(n)$ при $n\to\infty$. Число A называется пределом функции целочисленного аргумента $y=f(n)$ или последовательности $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$, если для всех достаточно больших значений n соответствующие значения функции сколь угодно мало отличаются от числа A. Символически предел последовательности записывается так: $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$ или $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=A$. Таким образом, предел функции целочисленного аргумента (или предел последовательности) есть частный случай понятия предела функции бесконечно большого аргумента, стремящегося к положительной бесконечности, когда аргумент принимает только целые значения.

Чтобы вычислить предел A функции $f(n)$ при $n\to\infty$, зададим положительное число ε. Если существует такое положительное число N, что для всех значений n, удовлетворяющих неравенству $n>N$, справедливо неравенство $|f(n)-A|<\varepsilon$, то число A есть предел функции $y=f(n)$ при $n\to\infty$.

Пример 1. Доказать, что последовательность с общим членом $a_n=\frac{1}{n^2}$ имеет предел, равный нулю.

Решение. Запишем ряд членов последовательности:

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \frac{1}{49}, \frac{1}{64}, \ldots .$$

Найдем общее выражение для числа N в зависимости от ε. Общий член данной последовательности $a_n=\frac{1}{n^2}$. Задаемся произвольным положительным числом ε. В соответствии с определением предела необходимо, чтобы при $n>N$ выполнялось неравенство $\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$ или $\frac{1}{n^2}<\varepsilon$. Решая неравенство относительно n, получаем $n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Таким образом, за величину N можно принять число $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ (или любое большее число). Итак, для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $N=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, что при $n>N=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ выполняется неравенство $\left|\frac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$. Это значит, что пределом данной последовательности является нуль.

Упражнения

1. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6}{n^3}=0$.
2. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)=1$.

3. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{7^n}=0$.

4. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

§ 3. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Среди множества функций, имеющих пределы, выделяется группа функций, имеющих пределом нуль. Функция $y=f(x)$, стремящаяся к нулю при $x\to x_0$, называется *бесконечно малой величиной*, что записывается так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$. Бесконечно малой величиной может быть как функция непрерывного аргумента, так и функция целочисленного аргумента. Примеры бесконечно малых величин: $y=2x-1$ при $x\to\frac{1}{2}$; $y=\frac{1}{x}$ при $x\to\infty$; $y=3^x$ при $x\to-\infty$; $y=\frac{1}{2^n}$ при $n\to\infty$. Следует иметь в виду, что некоторые значения бесконечно малой величины могут быть весьма большими. Суть понятия бесконечно малой состоит в том, что в процессе изменения эта переменная величина способна сделаться меньше сколь угодно малого $\varepsilon>0$. Это хорошо видно из другого определения бесконечно малой величины, в котором не используется понятие предела функции. Переменная величина y называется бесконечно малой, если в процессе изменения ее абсолютная величина становится и остается меньше любого наперед заданного сколь угодно малого положительного числа ε, т. е. если, начиная с некоторого момента, выполняется неравенство $|y|<\varepsilon$. Не следует смешивать бесконечно малую величину с очень малым постоянным числом. К бесконечно малым относят единственное постоянное число — нуль. Очевидно, что при любом $\varepsilon>0$ для величины $y=0$ выполняется требование $|y|=0<\varepsilon$.

Функция $f(x)$, имеющая предел A, называется *ограниченной величиной*, если существует такое положительное число M, что, начиная с некоторого момента в процессе изменения $f(x)$, все ее значения будут удовлетворять условию $|f(x)|\leqslant M$. Действительно, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, то, выбрав произвольное $\varepsilon>0$, начиная с некоторого момента, все значения $f(x)$ удовлетворяют двойному неравенству

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$$

Выберем число M равным наибольшей из абсолютных величин $|A+\varepsilon|$ и $|A-\varepsilon|$. Тогда справедливы неравенства

$$|A+\varepsilon|\leqslant M,\quad |A-\varepsilon|\leqslant M,$$

из которых вытекают неравенства

$$-M\leqslant A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon\leqslant M.$$

Отсюда имеем $-M\leqslant f(x)\leqslant M$, или $|f(x)|\leqslant M$.

Таким образом, всякая функция, имеющая предел, является величиной ограниченной. В противном случае функция $y=f(x)$ назы-

вается *величиной неограниченной*. Разумеется, всякая постоянная величина является ограниченной величиной.

Бесконечно малая величина $\alpha(x)$ также является величиной ограниченной, так как в процессе ее изменения абсолютная величина $|\alpha(x)|$ становится меньше любого положительного числа ε.

Прежде чем перейти к рассмотрению свойств бесконечно малых величин, докажем теорему, характеризующую связь бесконечно малой и величины, имеющей предел.

Теорема. *Если функция $y=f(x)$ имеет пределом число A, то она может быть представлена в виде*

$$f(x)=A+\alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая величина при $x\to x_0$. Справедливо и обратное утверждение: *если функция $y=f(x)$ может быть представлена в виде*

$$f(x)=A+\alpha(x),$$

где A — постоянная величина при $x\to x_0$; $\alpha(x)$ — бесконечно малая величина, то функция $f(x)$ имеет своим пределом число A, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

Доказательство. Пусть $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. По определению предела это означает, что, начиная с некоторого значения, для функции $f(x)$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число. Пусть $f(x)-A=\alpha(x)$. Тогда в процессе изменения $f(x)$ выполняется неравенство $|\alpha(x)|<\varepsilon$ и $\alpha(x)$ действительно является бесконечно малой величиной. Отсюда получаем

$$f(x)=A+\alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая.

Допустим обратное: пусть справедливо равенство $f(x)=A+\alpha(x)$, где A — постоянная величина; $\alpha(x)$ — бесконечно малая величина. Разность $f(x)-A=\alpha(x)$, начиная с некоторого значения $f(x)$, удовлетворяет неравенству

$$|f(x)-A|=|\alpha(x)|<\varepsilon,$$

где ε — сколь угодно малое положительное число. По определению предела это значит, что

$$A=\lim_{x\to x_0} f(x).$$

Справедливость теоремы доказана.

Пример 1. Показать, что функция $y=1-x^2$ является бесконечно малой величиной при $x\to 1$.

Решение. Пусть ε — произвольное положительное число. Требуется показать, что можно подобрать также число $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-1|<\delta$, выполняется неравенство $|1-x^2|<\varepsilon$.

Если $|x-1|<\delta$, то $|x+1|=|x-1+2|\leqslant|x-1|+2<\delta+2$. Следовательно, $|1-x^2|=|1-x||1+x|<\delta(\delta+2)$. Для выполнения неравенства $|1-x^2|<\varepsilon$ достаточно потребовать, чтобы $\delta(\delta+2)=\varepsilon$, т. е. $\delta^2+2\delta-\varepsilon=0$ или $\delta=-1+\sqrt{1+\varepsilon}$ (второй корень $-1-\sqrt{1+\varepsilon}$ отбрасываем, так как $\delta>0$). Таким образом, для любого ε найдено такое δ, что из неравенства $0<|x-1|<\delta$ следует неравенство $|1-x^2|<\varepsilon$. Следовательно, функция $y=1-x^2$ является бесконечно малой величиной при $x\longrightarrow 1$.

Рассмотрим свойства бесконечно малых величин.

Свойство 1. Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых величин есть также величина бесконечно малая.

Доказательство. Пусть дано k бесконечно малых величин: $\alpha, \beta, \ldots, t$. Докажем, что их алгебраическая сумма $w=\alpha\pm\beta\pm\ldots\pm t$ —также величина бесконечно малая. Выберем сколь угодно малое положительное число ε. Согласно определению бесконечно малых величин значения $|\alpha|$, $|\beta|, \ldots, |t|$ станут, начиная с некоторого, меньше, чем $\frac{\varepsilon}{k}$, т. е.

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{k};\quad |\beta|<\frac{\varepsilon}{k};\quad \ldots;\quad |t|<\frac{\varepsilon}{k}.$$

Модуль суммы чисел не превосходит суммы модулей этих чисел, т. е.

$$|a\pm b|\leqslant|a|+|b|.$$

Пользуясь этим неравенством, получим, что, начиная с некоторого значения, величины α, β, ..., t удовлетворяют неравенству

$$|w|=|\alpha\pm\beta\pm\ldots\pm t|\leqslant|\alpha|+|\beta|+\ldots+|t|<\underbrace{\frac{\varepsilon}{k}+\frac{\varepsilon}{k}+\ldots+\frac{\varepsilon}{k}}_{k\text{ слагаемых}}=\varepsilon.$$

Таким образом,

$$|w|=|\alpha\pm\beta\pm\ldots\pm t|<\varepsilon,$$

т. е. сумма w есть величина бесконечно малая, что и требовалось доказать.

Свойство 2. Произведение бесконечно малой величины на величину ограниченную есть величина бесконечно малая.

Доказательство. Пусть v—ограниченная величина, а α—бесконечно малая величина. Докажем, что произведение $v\alpha$ есть величина бесконечно малая.

В процессе изменения величины v наступит такой момент, после которого выполняется условие $|v|\leqslant M$, где M—положительное число.

В процессе изменения α для всех ее значений, начиная с некоторого, будет выполнено условие $|\alpha|<\varepsilon/M$, как бы ни мало было сколь угодно малое положительное число ε. Следовательно, начиная с некоторого момента, для значений величины $v\alpha$ справедливо неравенство

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{M}M\quad(|v\alpha|=|v|),$$

или

$$|v\alpha| < \varepsilon,$$

т. е. произведение $v\alpha$ есть величина бесконечно малая, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Произведение величины бесконечно малой на величину постоянную есть бесконечно малая величина.

Следствие 2. Произведение конечного числа бесконечно малых величин есть бесконечно малая величина.

Действительно, так как постоянная величина и бесконечно малая есть величины ограниченные, то, следовательно, к ним применимо свойство 2.

Свойство 3. Частное от деления бесконечно малой величины, на величину, имеющую предел, отличный от нуля, есть величина бесконечно малая.

Доказательство. Пусть α — бесконечно малая величина, а v — величина, имеющая предел $A \neq 0$. Докажем, что частное α/v есть величина бесконечно малая.

В процессе изменения величины v найдется такое положительное число $A/2$, что будет выполнено неравенство $|v| \geqslant A/2$. Из этого неравенства следует неравенство $\left|\frac{1}{v}\right| = \frac{1}{|v|} \leqslant \frac{2}{A}$. Следовательно, $1/v$ есть величина ограниченная, а согласно свойству 2 величина $\frac{\alpha}{v} = \alpha \cdot \frac{1}{v}$ есть величина бесконечно малая, как произведение бесконечно малой α на ограниченную величину $1/v$, что и требовалось доказать.

Упражнения

1. Показать, что функция $y = \frac{\sin x}{x}$ является бесконечно малой величиной при $x \to \infty$.

2. Показать, что функция $y = x^2 - 9$ является бесконечно малой величиной при $x \to 3$.

3. Показать, что функция $y = \sin x$ является бесконечно малой величиной при $x \to 0$.

§ 4. БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ СВЯЗЬ С БЕСКОНЕЧНО МАЛЫМИ

Наряду с бесконечно малыми величинами существуют переменные, называемые бесконечно большими величинами.

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой величиной*, если в процессе ее изменения абсолютная величина $|f(x)|$ становится и остается больше любого наперед заданного сколь угодно большого положительного числа N, т. е. для всех значений $f(x)$, начиная с некоторого, выполняется неравенство $|f(x)| > N$.

Если функция $f(x)$ — бесконечно большая величина при $x \to x_0$, то это записывается так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Покажем, что функция $f(x)$ при $x \to x_0$ является бесконечно большой величиной. Зададим положительное, сколь угодно большое число N. Если при этом можно подобрать такое положительное число δ, что для всех x, не равных x_0, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, справедливо также неравенство $|f(x)| > N$, то функция $f(x)$ будет действительно бесконечно большой величиной при $x \to x_0$.

При $x \to \infty$ то же самое справедливо, если для числа N можно подобрать такое положительное число m, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > m$, справедливо также неравенство $|f(x)| > N$.

Примеры бесконечно большой величины при $x \to x_0$ и при $x \to \infty$ иллюстрируют рис. 7.4 и 7.5.

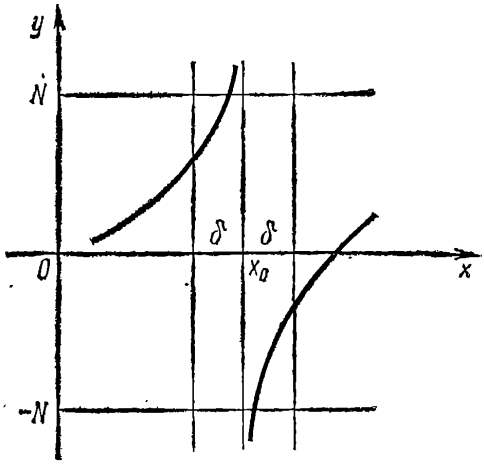

Рис. 7.4

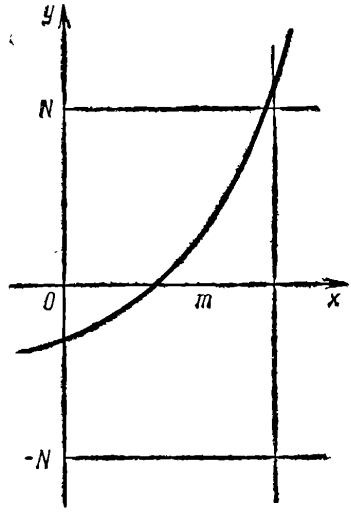

Рис. 7.5

Зададим произвольно положительное число N. Тогда найдется такая δ-окрестность точки $x = x_0$ (рис. 7.4), что часть графика функции $y = f(x)$, соответствующая этой δ-окрестности, находится вне полосы, ограниченной прямыми $y = -N$ и $y = N$. Аналогичная картина имеет место и в случае $x \to \infty$ (рис. 7.5). Если бесконечно большая величина $y = f(x)$ в некоторой окрестности точки $x = x_0$ принимает либо только положительные, либо только отрицательные значения, то говорят, что функция $f(x)$ стремится к положительной или отрицательной бесконечности. Это символически записывают так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

Не следует смешивать бесконечно большую величину с очень большим постоянным числом.

Пример 1. Показать, что при $x \to 0$ функция $y = a^{1/x^2}$, где $a > 1$, является бесконечно большой величиной.

Решение. Пусть N — произвольное, сколь угодно большое положительное число. Требуется подобрать такое число $\delta > 0$, что

для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-0|<\delta$ или $0<|x|<\delta$, справедливо неравенство $a^{1/x^2}N$. Если $|x|<\delta$, то $\frac{1}{x^2}>\frac{1}{\delta^2}$ и $a^{1/x^2}>a^{1/\delta^2}$. Поэтому требуемое неравенство выполняется при $a^{1/\delta^2}=N$ или $\frac{1}{\delta^2}=\log_a N$, откуда $\delta=\frac{1}{\sqrt{\log_a N}}$. Таким образом, для любого N найдено такое δ, что из неравенства $0<|x|<\delta$ следует неравенство $a^{1/x^2}>N$. Следовательно, функция $y=a^{1/x^2}$ $(a>1)$ является бесконечно большой величиной при $x\to 0$.

Бесконечно большие величины, так же как и бесконечно малые, играют очень важную роль в математическом анализе. Хотя первые представляют собой функции, не имеющие предела, а вторые — функции, имеющие предел, между ними существует простая связь.

Теорема. *Если функция $y=f(x)$ есть бесконечно большая величина, то функция $z=\frac{1}{f(x)}$ есть бесконечно малая величина; если функция $z=\varphi(x)$ есть бесконечно малая величина, то функция $y=\frac{1}{\varphi(x)}$ есть бесконечно большая величина.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)\to\infty$ при $x\to x_0$. Зададим произвольное, сколь угодно большое положительное число $N=1/\varepsilon$, где ε — произвольное, сколь угодно малое положительное число. Так как $f(x)$ — бесконечно большая величина, то для всех x, достаточно близких к x_0, справедливо неравенство

$$|f(x)|>N=1/\varepsilon.$$

Но тогда

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|<\frac{1}{N}=\varepsilon,$$

т. е. величина $\frac{1}{f(x)}$ есть бесконечно малая. Первая часть теоремы доказана. Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Пример 2. Найти предел функции $y=\frac{1}{x^2-4}$ при $x\to 2$.

Решение. Рассмотрим функцию $z=x^2-4$ при $x\to 2$. Зададим любое положительное число ε. Покажем, что функция x^2-4 есть величина бесконечно малая, т. е. что можно подобрать такое число $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-2|<\delta$, выполняется неравенство $|x^2-4|<\varepsilon$. Если $|x-2|<\delta$, то

$$|x+2|=|x-2+4|\leqslant|x-2|+4<\delta+4.$$

Следовательно,

$$|x^2-4|=|x-2||x+2|<\delta(\delta+4).$$

Для выполнения неравенства $|x^2-4|<\varepsilon$ достаточно потребовать, чтобы $\delta(\delta+4)=\varepsilon$, т. е. чтобы $\delta^2+4\delta-\varepsilon=0$ или $\delta=-2+\sqrt{4+\varepsilon}$ (второй корень $-2-\sqrt{4+\varepsilon}$ отбрасывается, так как $\delta>0$). Таким образом, для любого ε найдено такое число δ, что из неравенства $0<|x-2|<\delta$ следует неравенство $|x^2-4|<\varepsilon$. Следовательно, функция $z=x^2-4$ является бесконечно малой при $x\to 2$.

На основании теоремы о связи бесконечно малых и бесконечно больших величин функция $y=\frac{1}{x^2-4}$ является бесконечно большой величиной и, согласно определению, не имеет предела, т. е.

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}=\infty.$$

Упражнения

1. Показать, что функция $y=\frac{1}{x-2}$ является бесконечно большой величиной при $x\to 2$.

2. Показать, что функция $y=\frac{1}{x^2-2x+1}$ является бесконечно большой величиной при $x\to 1$.

3. Показать, что функция $y=a^{-1/x^2}$ $(a>1)$ является бесконечно малой величиной при $x\to 0$.

Указание. В задачах 2 и 3 использовать теорему о связи бесконечно малых и бесконечно больших величин.

§ 5. ПРАВИЛА ПРЕДЕЛЬНОГО ПЕРЕХОДА

Установим правила предельного перехода для вычисления пределов. Пусть переменные величины имеют конечные пределы. Для краткости не будем указывать, при каком именно изменении независимой переменной x рассматривается предел, т. е. все доказательства проводятся в предположении, что $x\to x_0$. При этом, говоря о нескольких функциях, будем предполагать, что они стремятся к своим пределам при одном и том же изменении независимой переменной, т. е. при $x\to x_0$.

Правило 1. *Предел алгебраической суммы конечного числа слагаемых равен сумме пределов этих слагаемых.*

Доказательство. Пусть даны k слагаемых функций $x, y, \ldots, z$, причем $\lim x=a$, $\lim y=b$, $\ldots$, $\lim z=c$. Это значит, что $x=a+\alpha$, $y=b+\beta$, $\ldots$, $z=c+\gamma$, где $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ — бесконечно малые величины. Докажем, что

$$\lim(x\pm y\pm\ldots\pm z)=\lim x+\lim y\pm\ldots\pm\lim z.$$

Составим алгебраическую сумму заданных функций:

$$W=x\pm y\pm\ldots\pm z=(a\pm b\pm\ldots\pm c)+(\alpha\pm\beta\pm\ldots\pm\gamma).$$

В первых скобках имеем постоянную величину $d=a\pm b\pm\ldots\pm c$, а во вторых — бесконечно малую величину $\tau=\alpha\pm\beta\pm\ldots\pm\gamma$ (это следует из свойства 1 бесконечно малых величин). Таким образом, $w=d+\tau$, следовательно, на основании обратной теоремы, приведенной в § 3, постоянная d является пределом функции w, т. е. $\lim w=d$ или $\lim(x+y\pm\ldots\pm z)=a\pm b\pm\ldots\pm c$, откуда

$$\lim(x\pm y\pm\ldots\pm z)=\lim x\pm\lim y\pm\ldots\pm\lim z,$$

что требовалось доказать.

Правило 2. *Предел произведения любого конечного числа сомножителей равен произведению их пределов.*

Доказательство. Докажем, что

$$\lim (x\, y \ldots z) = \lim x \lim y \ldots \lim z.$$

Проведем доказательство для двух сомножителей, а затем обобщим его на любое число сомножителей. Пусть $x = a + \alpha$; $y = b + \beta$. Тогда

$$w = xy = (a + \alpha)(b + \beta),$$

откуда

$$w = xy = ab + (a\beta + \alpha b + \alpha\beta).$$

Первое слагаемое в правой части есть постоянная величина $d = ab$, а второе слагаемое — бесконечно малая величина $\tau = a\beta + \alpha b + \alpha\beta$ (это следует из свойств 1 и 2 бесконечно малых величин). Таким образом, $w = d + \tau$, следовательно, на основании обратной теоремы, доказанной в § 3, постоянная d является пределом функции w:

$$\lim w = d, \text{ или } \lim x \cdot y = ab,$$

откуда

$$\lim x \cdot y = \lim x \cdot \lim y.$$

Если число сомножителей больше двух, то доказываем последовательно, например, что

$$\lim (x \cdot y \cdot t) = \lim [(x \cdot y)\, t] = \lim (x \cdot y) \cdot \lim t = \lim x \cdot \lim y \cdot \lim t$$

и т. д. (Здесь правило 2 применено дважды: сначала к произведению xy на t, а затем к произведению x на y.) Таким образом,

$$\lim (x\, y \ldots z) = \lim x \lim y \ldots \lim z,$$

что и требовалось доказать.

Правило 3. *Предел частного двух функций равен частному их пределов, если предел знаменателя отличен от нуля.*

Доказательство. Докажем, что $\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}$, если $\lim y \neq 0$. Пусть $x = a + \alpha$, $y = b + \beta$. Тогда

$$w = \frac{x}{y} = \frac{a + \alpha}{b + \beta} = \frac{a}{b} + \frac{\alpha b - a\beta}{b\,(b + \beta)}.$$

Первая дробь в правой части есть постоянная величина $d = a/b$, а вторая дробь — бесконечно малая величина $\tau = \frac{\alpha b - a\beta}{b\,(b + \beta)}$ (это следует из свойств 1, 2 и 3 бесконечно малых величин). Таким образом, $w = d + \tau$, следовательно, на основании обратной теоремы, доказанной в § 3, постоянная d является пределом функции w, т. е.

$$\lim w = d \text{ или } \lim \frac{x}{y} = \frac{a}{b},$$

откуда

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y},$$

что требовалось доказать.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 1} (2x^2 - 3x)$.

Решение. На основании правил 1 и 2 предельного перехода находим

$$\lim_{x \to 1} (2x^2 - 3x) = 2\left(\lim_{x \to 1} x\right)^2 - 3 \lim_{x \to 1} x = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = -1.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{9x^3 - 18x + 2}{12x^2 - 6x + 1}$.

Решение. На основании правил 1, 2 и 3 предельного перехода находим

$$\lim_{x \to 0} \frac{9x^3 - 18x + 2}{12x^2 - 6x + 1} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to 0} (9x^3 - 18x + 2)}{\lim\limits_{x \to 0} (12x^2 - 6x + 1)} = \frac{9\left(\lim\limits_{x \to 0} x\right)^3 - 18\left(\lim\limits_{x \to 0} x\right) + 2}{12\left(\lim\limits_{x \to 0} x\right)^2 - 6\left(\lim\limits_{x \to 0} x\right) + 1} = \frac{2}{1} = 2.$$

Как показывают решения приведенных примеров, в простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента. Однако не всегда можно вычислить предел с помощью трех правил предельного перехода. Так, правила 1 и 2 утрачивают смысл, если хотя бы одна из функций x или y не имеет конечного предела. Правило 3 неверно, если знаменатель дроби стремится к нулю. Особый интерес представляет вычисление предела дроби, у которой знаменатель и числитель имеют своими пределами нуль. Данную дробь необходимо, по возможности, так преобразовать и упростить, чтобы стало возможным использование правила 3.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}$.

Решение. Находим предел знаменателя

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - 2x) = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0.$$

Предел знаменателя равен нулю, поэтому воспользоваться правилом 3 предельного перехода нельзя. Непосредственная же подстановка в данное выражение предельного значения аргумента приводит к неопределенному выражению:

$$\frac{2^2 - 5 \cdot 2 + 6}{2^2 - 2 \cdot 2} = \frac{4 - 10 + 6}{4 - 4} = \frac{0}{0}.$$

Следовательно, прежде чем перейти к вычислению предела, необходимо данное выражение преобразовать. Числитель и знаменатель данной дроби при $x = 2$ обращаются в нуль, поэтому многочлены

(x^2-5x+6) и (x^2-2x) делятся без остатка на двучлен $(x-2)$ (на основании теоремы Безу). Итак,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)x}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x}.$$

Деление на $(x-2)$ числителя и знаменателя позволило избавиться от нулей в пределе каждого из них. Сокращение дроби на $(x-2)$ законно, так как условие $x\to 2$ предполагает $x\neq 2$. В результате непосредственной подстановки в полученное выражение предельного значения аргумента получаем

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x}=-\frac{1}{2}.$$

Указанный прием можно использовать в случае отношения двух алгебраических функций, если каждая из них имеет пределом нуль при $x\to x_0$. Разделив на $(x-x_0)$ числитель и знаменатель дроби, получаем выражение, предел которого легко найти по правилу 3 предельного перехода.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$.

Решение. Проверка дает:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x^2}-1=0;\quad \lim_{x\to 0}x^2=0.$$

Таким образом, мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для того чтобы ее раскрыть, тождественно преобразуем данную дробь, умножив числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю. Затем сократим дробь на x^2 и воспользуемся правилом 3 предельного перехода. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}=$$
$$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x}{x^2+10}$.

Решение. В данном случае имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, для раскрытия которой числитель и знаменатель следует почленно разделить на x^n, где n—степень многочлена в знаменателе. Разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x}{x^2+10}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{10}{x^2}}=2,$$

так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{10}{x^2}=0.$$

При $x\to\infty$ дробно-рациональная функция стремится либо к нулю, либо к бесконечности, либо к конечному числу, отличному от нуля, в зависимости от того, будет ли степень числителя меньше степени знаменателя, больше ее или равна ей. Действительно, если числитель и знаменатель рациональной дроби

$$y=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}$$

разделить на x^n, то имеем

$$y=\frac{a_0x^{m-n}+a_1x^{m-1-n}+\ldots+a_mx^{-n}}{b_0+b_1x^{-1}+\ldots+b_nx^{-n}}.$$

Если $x\to\infty$, то знаменатель стремится к b_0, а числитель при $m<n$ стремится к нулю, при $m=n$ — к a_0, при $m>n$ — к бесконечности. Таким образом,

$$\lim_{x\to\infty}y=0 \quad \text{при} \quad m<n;$$

$$\lim_{x\to\infty}y=\frac{a_0}{b_0} \quad \text{при} \quad m=n;$$

$$\lim_{x\to\infty}y=\infty \quad \text{при} \quad m>n.$$

Упражнения

1. Найти $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$.

Отв. 0.

2. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x+2}{x^2-1}$.

Отв. ∞.

3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x}{4x^3+x+10}$.

Отв. 0.

4. Найти $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+5}{x^2+3x+7}$.

Отв. 3/5.

5. Найти $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2)^{\lg x}$.

Отв. 1.

6. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$.

Отв. 1.

7. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$.

Отв. 3/2.

8. Найти $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{tg}x}{\sin 2x}$.

Отв. 1/2.

9. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$.

Отв. $-1/\sqrt{2}$.

10. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

Отв. 2/3.

11. Найти $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{ax}-x}{x-a}$.

Отв. $-1/2$ при $a>0$; ∞ при $a<0$.

12. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

Отв. 2/3.

13. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$.

Отв. $m/3$.

14. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

Отв. 1.

15. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{3x^2-4x}$.

Отв. 2/3.

16. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x}{1-2x^3}$.

Отв. —5/2.

17. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$.

Отв. —2.

18. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$.

Отв. 5/2.

19. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\lg x$.

Отв. 0.

20. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\arcsin x$.

Отв. $\pi/6$.

21. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$.

Отв. 0.

22. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

Отв. 1.

§ 6. ПРИЗНАКИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

Признаки существования предела функции используются в том случае, если непосредственно найти предел функции трудно. Рассмотрим два признака существования предела функции (соответственно для функции непрерывного и целочисленного аргумента).

Теорема 1 (первый признак существования предела). *Если в процессе изменения значения функции* $f(x)$ *остаются заключенными между значениями других функций* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$, *т. е.*

$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x),$$

и если $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *при* $x\to x_0$ *стремятся к общему пределу* A, *т. е.*

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A;\quad\lim_{x\to x_0}\psi(x)=A,$$

то функция $f(x)$ *при* $x\to x_0$ *имеет предел, равный* A:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A,$$

Доказательство. Возьмем произвольную ε-окрестность числа A. По условию существует такая δ-окрестность точки x_0, что соответствующие значения функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принадлежат ε-окрестности числа A. Так как значения функции $f(x)$ всегда заключены между значениями функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, то, начиная с некоторого момента, значения функции $f(x)$ также попадают в ε-окрестность числа A и выполняется неравенство

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Следовательно, при произвольном ε

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим функцию $y=f(n)$ целочисленного аргумента n или последовательность $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$. Последовательность называется *ограниченной сверху*, если существует такое число M, что для всех n выполняется условие

$$y_n<M.$$

Последовательность называется *ограниченной снизу*, если существует такое число m, что $y_n > m$ для всех n. Если последовательность ограничена сверху и снизу, то она называется *ограниченной*.

Теорема 2 (второй признак существования предела). *Если последовательность $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$ монотонно возрастает и ограничена сверху, то она имеет предел. Если последовательность $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$ монотонно убывает и ограничена снизу, то она также имеет предел.*

Доказательство. Пусть дана возрастающая монотонно последовательность $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$, ограниченная сверху. Тогда существует такое число M, что $y_n < M$ для всех n. Действительно, если точка $y = f(n)$, двигаясь вверх в одном направлении по оси Oy, не переходит границы отрезка $[0, M]$, то она неограниченно приближается к некоторой точке $y = A$. Ясно, что $A \leqslant M$. Если же монотонная последовательность $y = f(n)$ неограниченная, то точка y_n, двигаясь вверх в одном направлении по оси Oy, выходит из любой окрестности точки $y = 0$, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} f(n) = +\infty.$$

Аналогично доказывается вторая часть теоремы в случае убывающей монотонно последовательности; в случае, если последовательность неограниченная, функция $y = f(n)$ стремится к $-\infty$, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} f(n) = -\infty.$$

Теорема 2 дает возможность убедиться в существовании предела, но не указывает его числового значения.

§ 7. ДВА ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ПРЕДЕЛА. ЧИСЛО *e*. НАТУРАЛЬНЫЕ ЛОГАРИФМЫ. ЭКСПОНЕНТЫ

В математическом анализе большое применение находят два предельных соотношения. Предельное соотношение

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

называется первым замечательным пределом.

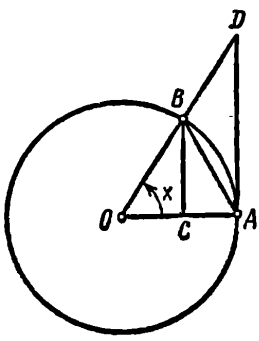

Рис. 7.6

Теорема 1. *Функция $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ имеет предел, равный единице.*

Доказательство. Построим окружность единичного радиуса и отложим на ней угол $AOB = x$ радиан (рис. 7.6). Так как функция $\frac{\sin x}{x}$ четная, то достаточно рассмотреть случай $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Построим линию синуса BC и линию тангенса AD. Из рис. 7.6 видно, что

площадь $\triangle OAB <$ площади сектора $OAB <$ площади $\triangle OAD$.

Площадь $\triangle OAB = \frac{1}{2}\sin x$; площадь сектора $OAB = \frac{1}{2}x$; площадь $\triangle OAD = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, следовательно,

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$$

или

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \tag{7.1}$$

Так как $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x > 0$. Разделим почленно неравенства (7.1) на $\sin x$:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Для обратных величин справедливы неравенства

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Пусть $x \longrightarrow 0$. Функция $\frac{\sin x}{x}$ заключена между функцией $\cos x$ и единицей. Из геометрического определения косинуса очевидно, что

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

Отсюда, на основании первого признака существования предела, заключаем, что

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$.

Решение. При $x \longrightarrow 0$ $\alpha = 3x$ также стремится к нулю, поэтому, умножая числитель и знаменатель на 3 и применяя формулу (7.2), получим

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} = 3 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Решение. Представим заданную дробь в виде

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Тогда

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x};$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\lim\limits_{x \to 0} \cos x} = 1; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$.

Решение. Известно, что $1 - \cos x = 2 \sin^2 \dfrac{x}{2}$. При $x \to 0$ величина $\alpha = \dfrac{x}{2}$ также стремится к нулю. Тогда

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \to 0} \sin \frac{x}{2};$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1; \quad \lim_{x \to 0} \sin \frac{x}{2} = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

Предельное соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

называется вторым замечательным пределом.

Теорема 2. *Функция* $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ *при* $n \to \infty$ *имеет конечный предел, называемый числом* e.

Доказательство. По формуле бинома Ньютона имеем:

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\ldots(n-n+1)}{n!} \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) +$$
$$+ \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

С ростом n фиксированное k-е слагаемое

$$\frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

увеличивается. Кроме того, при возрастании n добавляются новые положительные слагаемые. Таким образом, y_n — возрастающая функция аргумента n. Но эта функция ограничена. В самом

деле, заменяя во всех членах правильные дроби, стоящие в скобках, единицами, получим

$$y_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{k!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

Это неравенство еще более усилится, если произвести следующие замены:

$$\frac{1}{3!}=\frac{1}{2\cdot 3} \text{ на } \frac{1}{2\cdot 2}=\frac{1}{2^2},$$

$$\frac{1}{4!}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} \text{ на } \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}=\frac{1}{2^3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{k!}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\ldots k} \text{ на } \underbrace{\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2\ldots 2}}_{k-1 \text{ раз}}=\frac{1}{2^{k-1}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\ldots k\ldots n} \text{ на } \underbrace{\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2\ldots 2\ldots 2}}_{n-1 \text{ раз}}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Следовательно,

$$y_n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Дописав в правой части члены прогрессии $\frac{1}{2^n}$, $\frac{1}{2^{n+1}}$, ..., получим

$$y_n < 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots\right).$$

В скобках последнего неравенства имеем бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q=1/2$. Сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии

$$S_n=\frac{1}{1-q},$$

или

$$S_n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

Таким образом,

$$y_n < 1+2, \quad \text{или} \quad y_n < 3.$$

Итак, возрастающая последовательность $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ограничена сверху. Отсюда, на основании второго признака существования предела, заключаем, что последовательность $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ имеет пре-

дел, заключенный, очевидно, между числами 2 и 3. Этот предел называется числом e. Число e — иррациональное, его приближенное значение $e \approx 2{,}718281828459045$. На практике принимают $e \approx 2{,}718$. Можно показать, что если переменная $x \to \infty$, изменяясь по любому закону, то функция $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ также имеет своим пределом число e, т. е.

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{7.3}$$

Справедливость этой формулы будет доказана, если установить, что

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \tag{7.4}$$

и что

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{7.5}$$

Докажем сначала соотношение (7.4) Пусть x заключено между натуральными числами n и $n+1$, т. е.

$$n \leqslant x < n + 1. \tag{7.6}$$

Докажем, что величина $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ заключена между следующими границами:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{7.7}$$

Сопоставим выражения $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$ и $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. В силу неравенства (7.6) $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x}$, следовательно, у первого выражения основание $1 + \frac{1}{n+1}$ меньше, чем у второго, а показатель n не превосходит показателя x. Поэтому $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Аналогично доказывается и неравенство (7.7). Если $x \to \infty$, то $n \to \infty$ и $(n+1) \to \infty$. Найдем пределы обеих границ:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e;$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} =$$

$$= \frac{e}{1} = e.$$

Применяя к неравенству (7.7) первый признак существования предела, получим

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Докажем теперь соотношение (7.5). Введем вспомогательную переменную $z = -x - 1$, которая при $x \to -\infty$ стремится к $+\infty$. Имеем

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{z+1}\right)^{-(z+1)} = \left(\frac{z+1}{z}\right)^{z+1} = \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z+1}.$$

Поэтому

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{z \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z+1} = \lim_{z \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z \cdot \lim_{z \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right).$$

В силу соотношения (7.4) первый сомножитель равен e, т. е.

$$\lim_{z \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \cdot 1 = e.$$

Таким образом,

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Пусть $x = 1/t$. Очевидно, если $x \to \infty$, то $t \to 0$ и предельное соотношение (7.3) принимает вид

$$\lim_{t \to 0} (1 + t)^{1/t} = e.$$

Переходя к прежним обозначениям, получим

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e. \tag{7.8}$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x$.

Решение. Находим

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^k = \left\{\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right\}^k = e^k.$$

В частности, при $k = -1$ получаем

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.

Решение. Так как $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, то, согласно соотношению (7.8),

$$\lim_{x \to 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \to 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{1/\operatorname{tg} x} = e,$$

так как $\alpha = \operatorname{tg} x \to 0$ при $x \to 0$.

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$.

Решение. Предел основания равен 1, а показатель степени стремится к бесконечности. Имеем неопределенность вида 1^∞. Для того чтобы раскрыть эту неопределенность, представим основание степени в виде $1+x$, а в показателе выделим множитель вида $1/x$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-1}-1\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2x}{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{x}}}=e^2.$$

Переходя к пределу в квадратной скобке, согласно соотношению (7.8), получаем число e, так как $\alpha=\frac{2}{x-1}\to 0$ при $x\to\infty$.

С числом e связана система логарифмов, которая в ряде случаев оказывается более удобной, чем любая другая система логарифмов. Логарифм числа x по основанию e, т. е. $\log_e x$, называется *натуральным логарифмом* и обозначается символом $\ln x$. Таким образом, натуральный логарифм числа x есть показатель степени, в которую надо возвести число e, чтобы получить x:

$$e^{\ln x}=x.$$

Натуральные и десятичные логарифмы связаны следующим соотношением:

$$\lg x=M\ln x,$$

где M — модуль перехода ($M=\lg e\approx 0{,}4343$). Действительно, по определению логарифма имеем

$$e^{\ln x}=10^{\lg x}.$$

Прологарифмируем это равенство по основанию 10

$$\ln x\lg e=\lg x\lg 10,$$

откуда

$$\lg x=\lg e\ln x.$$

Таким образом,

$$\lg x=M\ln x.$$

Обратная связь между логарифмами дается соотношением

$$\ln x=\frac{1}{M}\lg x,$$

где $M_1=\frac{1}{M}=2{,}3026$. Для умножения на M и на $1/M$ можно пользоваться специальными таблицами (табл. 5).

Таблица 5

Значения логарифмической и показательной функций

x	$\lg x$	$\ln x$	e^x	x	$\lg x$	$\ln x$	e^x
1,0	000	0,000	2,72	5,5	740	1,705	244
1,1	041	095	3,00	5,6	748	723	270
1,2	079	192	3,32	5,7	756	740	299
1,3	114	252	3,67	5,8	763	758	330
1,4	146	336	4,06	5,9	771	775	365
1,5	176	0,405	4,48	6,0	778	1,792	403
1,6	204	470	4,95	6,1	785	808	446
1,7	230	530	5,47	6,2	792	825	493
1,8	255	588	6,05	6,3	799	841	545
1,9	279	642	6,69	6,4	806	856	602
2,0	301	0,693	7,39	6,5	813	1,872	665
2,1	322	742	8,17	6,6	820	887	735
2,2	342	789	9,03	6,7	826	902	812
2,3	362	833	9,97	6,8	833	918	898
2,4	380	875	11,0	6,9	839	932	992
2,5	398	0,916	12,2	7,0	845	1,946	1 097
2,6	415	955	13,5	7,1	851	960	1 212
2,7	431	993	14,9	7,2	857	974	1 339
2,8	447	1,030	16,4	7,3	863	982	1 480
2,9	462	065	18,2	7,4	869	2,001	1 636
3,0	477	1,099	20,1	7,5	875	2,015	1 808
3,1	491	131	22,2	7,6	881	028	1 998
3,2	505	163	24,5	7,7	887	041	2 208
3,3	519	194	27,1	7,8	892	054	2 440
3,4	532	224	30,0	7,9	898	067	2 697
3,5	544	1,253	33,1	8,0	903	2,079	2 981
3,6	556	281	36,6	8,1	909	092	3 294
3,7	568	308	40,4	8,2	914	104	3 641
3,8	580	335	44,7	8,3	919	116	4 024
3,9	591	361	49,4	8,4	924	128	4 447
4,0	602	1,386	54,6	8,5	929	2,140	4 914
4,1	613	411	60,3	8,6	935	152	5 432
4,2	623	435	66,7	8,7	940	163	6 003
4,3	634	458	73,7	8,8	945	175	6 634
4,4	644	482	81,5	8,9	949	186	7 332
4,5	653	1,504	90,0	9,0	954	2,197	8 103
4,6	663	526	99,5	9,1	959	208	8 955
4,7	672	548	110	9,2	964	219	9 897
4,8	681	569	121	9,3	969	230	10 938
4,9	690	589	134	9,4	973	241	12 088
5,0	699	1,609	148	9,5	978	2,251	13 360
5,1	708	629	164	9,6	982	263	14 765
5,2	716	649	181	9,7	987	272	16 318
5,3	724	668	200	9,8	991	282	18 034
5,4	732	686	221	9,9	996	293	19 930
				10,0	000	2,303	22 026

В графе $\lg x$ приведены мантиссы десятичных логарифмов. Для нахождения натуральных логарифмов чисел нужно пользоваться соотношением

$$\ln x = 2{,}303 \lg x.$$

Заметим, что

$$\lg x = 0{,}4343 \ln x.$$

Пример 7. Найти $\ln 100$.

Р е ш е н и е. По формуле $\ln x = \frac{1}{M} = \lg x$ находим

$$\ln 100 = \frac{1}{M} \lg 100 \cong 2{,}3026 \cdot 2 = 4{,}605.$$

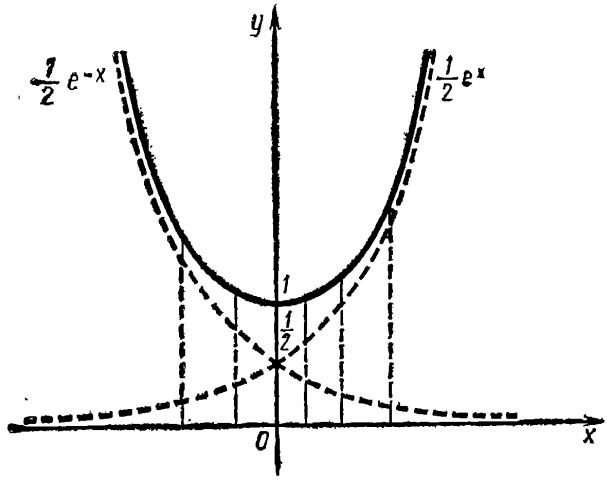

Рис. 7.7

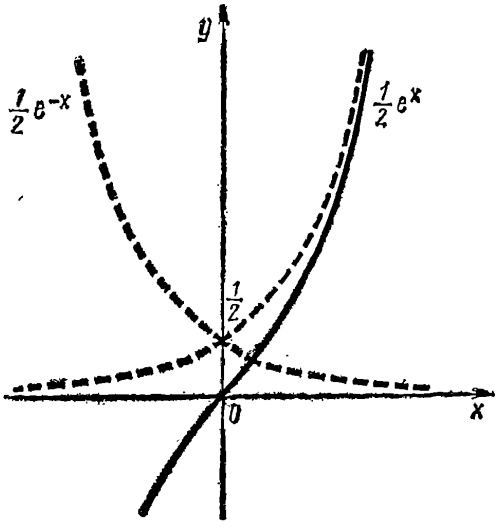

Рис. 7.8

Число e находит широкое применение в качестве основания показательной функции. Функцию $y = e^x$ называют *экспоненциальной*, а ее график — *экспонентой*. С помощью экспоненциальных функций образуется большой класс элементарных функций — гиперболические функции. *Гиперболическими функциями* называются функции вида

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Первая из этих функций называется *гиперболическим косинусом* и обозначается

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Вторая функция называется *гиперболическим синусом* и обозначается

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Эти функции определены на всей оси Ox и связаны между собой рядом соотношений, аналогичных соотношениям между тригонометрическими функциями $\cos x$ и $\sin x$, что и объясняет их названия. Например,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$$

Графики функций $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ можно построить по графикам экспоненциальных функций e^x и e^{-x} (см. рис. 7.7 и 7.8). Значения тригонометрических функций приведены в табл. 6.

Таблица 6

Значения гиперболических функций

x	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	x	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
0	0	1	2,0	3,627	3,762
0,1	0,100	1,005	2,1	4,022	4,289
0,2	0,201	1,020	2,2	4,457	4,568
0,3	0,304	1,045	2,3	4,937	5,037
0,4	0,411	1,081	2,4	5,466	5,557
0,5	0,521	1,128	2,5	6,050	6,132
0,6	0,637	1,185	2,7	7,407	7,474
0,7	0,759	1,255	2,8	8,192	8,253
0,8	0,888	1,337	2,9	9,060	9,115
0,9	1,026	1,433	3,0	10,02	10,07
1,0	1,175	1,543	3,1	11,08	11,12
1,1	1,336	1,669	3,2	12,25	12,29
1,2	1,509	1,811	3,3	13,54	13,58
1,3	1,698	1,971	3,4	14,97	15,00
1,4	1,904	2,151	3,5	16,54	16,57
1,5	2,129	2,352	3,6	18,29	18,32
1,6	2,376	2,578	3,7	20,21	20,24
1,7	2,646	2,828	3,8	22,34	22,36
1,8	2,942	3,107	3,9	24,69	24,71
1,9	3,268	3,418	4,0	27,29	27,31

При $x > 4$ приближенно можно считать, что $\operatorname{sh} x \approx \operatorname{ch} x \approx \frac{e^x}{2}$.

Упражнения

1. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{3x}$.

   Ответ: 5/3.

2. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$.

   Ответ. α/β.

3. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

   Ответ. 1/2.

4. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1 - \cos x}}$.

   Ответ. $\sqrt{2}$.

5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$.

Отв. $2\cos a$.

6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha x}{x}$.

Отв. α.

7. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\operatorname{tg}\beta x}$.

Отв. α/β.

8. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$.

Отв. 1/2.

9. Найти $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg}x$.

Отв. 1.

10. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arc\,tg}x}{x}$.

Отв. 1.

11. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$.

Отв. $e^{9/2}$.

12. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x^3+2}{5x^3}\right)^{\sqrt{x}}$.

Отв. 1.

13. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x^2)^{\frac{1}{2x^2}}$.

Отв. e.

14. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

Отв. e.

15. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2}$.

Отв. e.

§ 8. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ВЕЛИЧИН. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Во многих случаях представляет интерес сравнение бесконечно малых величин между собой по характеру их приближения к нулю. В основе сравнения двух бесконечно малых α и β лежит поведение их отношения; при этом считают, что переменная, на которую делят, не обращается в нуль. Под символами α и β понимаются бесконечно малые величины при одном и том же предельном изменении их аргумента. Таким образом, чтобы сравнить две бесконечно малые величины α и β, надо найти предел их отношения. При нахождении пределов отношения бесконечно малых величин возможны различные случаи.

Если отношение $\dfrac{\beta}{\alpha}$ двух бесконечно малых величин бесконечно мало, т. е. $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$ или $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$, то β имеет высший порядок малости относительно α, или α имеет низший порядок малости относительно β.

Пример 1. Показать, что порядок функции $\dfrac{x^3}{3-x}$ выше порядка функций x^2 при $x\to 0$.

Решение. Очевидно, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3-x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2(3-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3-x}=0.$$

Следовательно, функция $\dfrac{x^3}{3-x}$ есть бесконечно малая величина высшего порядка малости, чем функции x^2.

Если отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ $\left(\text{или } \frac{\alpha}{\beta}\right)$ двух бесконечно малых величин стремится к конечному пределу, отличному от нуля, то величины α и β имеют одинаковый порядок малости.

Пример 2. Показать, что функции $\frac{2x^2}{1+x}$ и x^2, бесконечно малые при $x \to 0$, являются бесконечно малыми функциями одного порядка малости.

Решение. Найдем предел отношения двух данных функций:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x^2}{x+1}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{x^2(x+1)} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{1}{x+1} = 2 \neq 0.$$

Следовательно, бесконечно малые функции $\frac{2x^2}{1+x}$ и x^2 суть бесконечно малые одного порядка малости.

Если отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ двух бесконечно малых величин не стремится ни к какому пределу, то бесконечно малые α и β несравнимы между собой.

Иногда необходимо получить более точную сравнительную характеристику поведения бесконечно малых величин, а именно выразить их порядок числами. Так, при $\alpha \to 0$ каждая из бесконечно малых величин α, α^2, α^3, α^4, α^5, ..., начиная со второй, имеет высший порядок малости относительно любой предшествующей. Бесконечно малая α называется *основной*. Хотя выбор основной бесконечно малой произволен, обычно берут простейшую из них. Величина α^2 имеет второй порядок малости относительно α, величина α^3 — третий порядок малости относительно α и т. д. Очевидно, что при $k > 0$ величина α^k будет бесконечно малой одновременно с α.

Если отношение $\frac{\beta}{\alpha^k}$ $(k > 0)$ двух бесконечно малых величин стремится к конечному пределу, отличному от нуля, то бесконечно малая β имеет k-й порядок малости относительно основной бесконечно малой α.

Пример 3. Показать, что функция $1 - \cos x$ будет бесконечно малой второго порядка малости относительно x при $x \to 0$.

Решение. Находим

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Следовательно, функция $1 - \cos x$ есть бесконечно малая второго порядка малости относительно x.

Рассмотрим частный случай, когда

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1.$$

Если α и β — бесконечно малые величины одного порядка малости, причем

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1 \text{ или } \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1,$$

то они называются *эквивалентными бесконечно малыми величинами*. Символически эквивалентность двух бесконечно малых α и β обозначается так: $\alpha \approx \beta$. Признак эквивалентности двух бесконечно малых величин формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема. *Для эквивалентности двух бесконечно малых α и β необходимо и достаточно, чтобы их разность была бесконечно малой величиной более высокого порядка малости, чем α и β.*

Доказательство. Пусть $\alpha - \beta = \gamma$. Необходимость теоремы вытекает из того, что

$$\lim \frac{\gamma}{\beta} = \lim \frac{\alpha - \beta}{\beta} = \lim \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) = 0,$$

так как по условию $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$. Аналогично, $\lim \frac{\gamma}{\alpha} = 0$. Таким образом, $\gamma = \alpha - \beta$ есть бесконечно малая более высокого порядка малости, чем α и чем β.

Докажем достаточность теоремы. Пусть $\lim \frac{\gamma}{\beta} = 0$, т. е. $\lim \frac{\alpha - \beta}{\beta} = 0$. Отсюда следует, что $\lim \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) = 0$. Следовательно, $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$ или $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$, т. е. бесконечно малые α и β эквивалентны. Аналогичный результат получается в случае, если вначале принять $\lim \frac{\gamma}{\alpha} = 0$.

Пример 4. Показать, что функции $\frac{x}{1-x}$ и $\frac{x}{1+x^2}$, бесконечно малые при $x \to 0$, эквивалентны.

Решение. Найдем

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(1-x)}{x(1+x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{1+x^2}{1-x} = 1.$$

Следовательно, функции $\frac{x}{1-x}$ и $\frac{x}{1+x^2}$ при $x \to 0$ эквивалентны, т. е.

$$\frac{x}{1-x} \approx \frac{x}{1+x^2} \text{ при } x \to 0.$$

Упражнения

1. Показать, что функции $\frac{1-x}{1+x}$ и $1 - \sqrt{x}$ являются бесконечно малыми одного порядка малости при $x \to 1$.

2. Показать, что порядок функции $\frac{3x^4 - x}{x+1}$ выше, чем порядок функции x^3 при $x \to 0$.

3. Показать, что функция $\operatorname{tg} x - \sin x$ будет бесконечно малой третьего порядка малости относительно x при $x \to 0$.

4. Показать, что функции $e^{2x}-e^{x}$ и $\sin 2x-\sin x$, бесконечно малые при $x\to 0$, эквивалентны.

5. Показать, что функции $\ln(1+\sqrt{x\sin x})$ и x, бесконечно малые при $x\to 0$, эквивалентны.

6. Показать, что функции $e^{\sin x}-1$ и x, бесконечно малые при $x\to 0$, эквивалентны.

7. Показать, что функции $e^{x}-\cos x$ и x, бесконечно малые при $x\to 0$, эквивалентны.

§ 9. ПРИМЕНЕНИЕ ОТНОШЕНИЙ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ВЕЛИЧИН К НАХОЖДЕНИЮ ПРЕДЕЛОВ И ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

Критерий эквивалентности дает возможность приближенно выражать одни бесконечно малые через другие. Полагая $\alpha\approx\beta$, допускаем возможность абсолютной погрешности $|\gamma|$, где $\gamma=\alpha-\beta$. Однако качество приближения, как известно, оценивается относительной погрешностью. Если α и β — эквивалентные бесконечно малые величины, то вместе с α и β уменьшается не только абсолютная погрешность $|\gamma|$, но и относительная погрешность $\left|\frac{\gamma}{\alpha}\right|$. Это означает, что при достаточно малых α и β можно, со сколь угодно большой относительной точностью, полагать приближенно $\alpha\approx\beta$. Последнее, в свою очередь, приводит к использованию эквивалентных бесконечно малых величин при раскрытии неопределенности вида $\frac{0}{0}$, т. е. при отыскании предела отношения двух бесконечно малых.

При вычислении предела отношения двух бесконечно малых величин можно числитель и знаменатель дроби заменять эквивалентными бесконечно малыми величинами, что не влияет на значение предела данного отношения. Действительно, пусть $\alpha\approx\alpha_1$ и $\beta\approx\beta_1$, т. е.

$$\lim\frac{\alpha}{\alpha_1}=1 \quad\text{и}\quad \lim\frac{\beta}{\beta_1}=1.$$

Тогда

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\alpha_1}\cdot\frac{\alpha_1}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\alpha_1}\cdot\frac{\alpha_1}{\beta_1}\cdot\frac{\beta_1}{\beta}=$$

$$=\lim\frac{\alpha}{\alpha_1}\cdot\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}\cdot\lim\frac{\beta}{\beta_1}=1\cdot\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}\cdot 1=\lim\frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Таким образом, если выбрать α_1 и β_1 достаточно простыми, то это может упростить задачу нахождения предела отношения двух бесконечно малых. Из доказанного вытекает также, что две бесконечно малые, эквивалентные третьей, эквивалентны между собой.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$.

Решение. При $x\to 3$ функция $x-3$ бесконечно малая, следовательно,

$$\sin(x-3)\approx x-3.$$

Так как при замене бесконечно малой функции $\sin(x-3)$ эквивалентной ей функцией $x-3$ предел отношения не изменится, то

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-1}=\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

Решение. Так как $\ln e=1$, то

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln\left[1+\left(\frac{x}{e}-1\right)\right]}{x-e}.$$

При $x\to e$ функция $\dfrac{x}{e}-1$ бесконечно малая, поэтому

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln\left[1+\left(\frac{x}{e}-1\right)\right]}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\frac{x}{e}-1}{x-e}=\frac{1}{e}\lim_{x\to e}\frac{x-e}{x-e}=\frac{1}{e}.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^4}}{\ln(1+2x)}$.

Решение. При $x\to 0$ в числителе и знаменателе данной дроби имеем бесконечно малые функции. Предел отношения этих функций не изменится, если заменить их им эквивалентными. При $x\to 0$ $\ln(1+2x)\approx 2x$, а $x^3+2x^4\approx x^3$, так как разность $(x^3+2x^4)-x^3=2x^4$ есть бесконечно малая более высокого порядка малости по сравнению с x^3+2x^4 и с x^3.

Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{x^3+2x^4}=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{x}+2}=0$$

и

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{x^3}=2\lim_{x\to 0}x=0.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x^4}}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3}}{2x}=\frac{1}{2}.$$

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

При $x\to 0$ функции $\sin x$ и x являются бесконечно малыми, следовательно, они эквивалентны, т. е. $\sin x\approx x$ при $x\to 0$.

Таким образом, при достаточно малых x можно с очень малой относительной ошибкой заменять $\sin x$ на x. Это дает возможность

приближенно вычислять значения функции $y=\sin x$ для различных малых значений x. Так, например,

$$\sin 10^\circ = \sin \frac{\pi}{180}\cdot 10 = \sin \frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} \approx \frac{3{,}14}{18} \approx 0{,}1728.$$

Сравнивая с табличным значением $\sin 10^\circ \approx 0{,}1736$, видим, что относительная погрешность составляет около 1%.

В примере 3 § 8 найдено, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$. Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}\right]=1$, т. е.

$$1-\cos x \approx \frac{1}{2}x^2 \text{ при } x\to 0.$$

Окончательно получаем приближенное равенство

$$\cos x \approx 1-\frac{1}{2}x^2.$$

Последнее равенство позволяет без таблиц вычислять приближенное значение функции $y=\cos x$ для различных малых значений x. Так, например,

$$\cos 18^\circ = \cos \frac{\pi}{180}\cdot 18 = \cos \frac{\pi}{10} \approx 1-\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{100} \approx 1-\frac{3{,}14^2}{2\cdot 100} \approx 0{,}9507.$$

Сравнивая с табличным значением $\cos 18^\circ \approx 0{,}9511$, замечаем, что погрешность составляет 0,04%.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{1/2x}$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель данной дроби на сопряженное значение $\sqrt{1+x}+1$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{1}{2}x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{1}{2}x(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{2}(\sqrt{1+x}+1)}=1.$$

Следовательно, бесконечно малые величины $\sqrt{1+x}-1$ и $\frac{1}{2}x$ эквивалентны, т. е. при $x\to 0$

$$\sqrt{1+x}-1 \approx \frac{1}{2}x,$$

откуда следует приближенное равенство

$$\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x.$$

Последнее равенство дает возможность вычислять значения функции $y=\sqrt{1+x}$ для различных малых значений x. Так, например,

$$\sqrt{627}=\sqrt{625+2}=\sqrt{625}\sqrt{1+\frac{2}{625}} \approx 25\left(1+\frac{2}{2\cdot 625}\right) \approx 25{,}040.$$

Упражнения

1. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}$.

   Отв. $\cos^3 a$.

2. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos \alpha x)}{\ln(\cos \beta x)}$.

   Отв. α^2/β^2.

3. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \{x[\ln(a+x)-\ln x]\}$.

   Отв. a.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \arcsin x}{3x}$.

   Отв. 2/3.

5. Найти $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^x - e}{x-1}$.

   Отв. e.

6. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$.

   Отв. 2.

7. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+mx)}{nx}$.

   Отв. m/n.

8. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$.

   Отв. $\dfrac{2 \ln a}{b}$.

9. Найти $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$.

   Отв. π.

10. Найти $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x$.

    Отв. 1.

11. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^4}$.

    Отв. 0.

12. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-e^{-x}}{\sin x}$.

    Отв. 1.

13. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x - \arcsin x}{2x + \operatorname{arctg} x}$.

    Отв. 1/3.

14. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+mx)}{nx}$.

    Отв. m/n.

§ 10. ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ

Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную соотношением

$$f(x) = \frac{x+x^2}{|x|}.$$

Эта функция определена всюду, кроме точки $x=0$ (рис. 7.9). При $x \to 0$ функция не имеет предела. Однако, если $x \to 0$, пробегая при этом последовательность положительных значений, то $f(x) \to 1$. Если же $x \to 0$, пробегая последовательность отрицательных значений, то $f(x) \to -1$. Таким образом, данная функция $f(x)$ при $x \to 0$ не имеет предела в том смысле этого понятия, который был установлен определением, приведенным в § 1 настоящей главы. Однако определение предела можно несколько видоизменить, введя в него следующее дополнительное условие: все значения независимой переменной x, стремящиеся к пределу a, должны быть больше, чем a, или меньше, чем a. Число A называется *правосторонним пределом* или *пределом справа* функции $f(x)$ в точке $x=a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $0 < x-a < \delta$ выполняется неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$. Число A называется *левосторонним пределом* или *пределом слева* функции $f(x)$ в точке $x=a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $0 < a-x < \delta$ выполняется неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$.

Правосторонний предел A функции $f(x)$ при $x \to a$ обозначается так:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A.$$

Левосторонний предел A функции $f(x)$ при $x \to a$ обозначается так:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = A.$$

Правосторонний и левосторонний пределы объединяются общим названием *односторонние пределы*. В связи с этим обыкновенный предел называют иногда *двусторонним*.

Все свойства предела функции распространяются на односторонние пределы. Между пределом функции в точке и односторонними пределами существует определенная связь. Если оба односторонних предела функции в точке существуют и равны между собой, то предел функции в точке существует. Если оба односторонних предела функции в точке существуют, но не равны между собой, то предела функции в точке не существует.

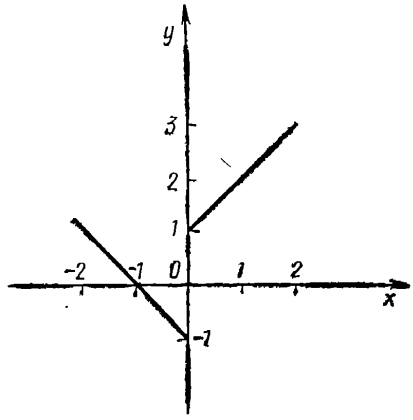

Рис. 7.9

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 2 \pm 0} \dfrac{x}{x-2}$.

Решение. а) Если $x \to 2$ справа, то $x > 2$ и $x - 2 > 0$. Следовательно, при $x \to 2+0$ разность $(x-2) \to 0$, оставаясь положительной. Тогда $\lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{x}{x-2} = +\infty$, так как числитель стремится к 2, а знаменатель к нулю.

б) Если $x \to 2$ слева, то $x < 2$ и $x - 2 < 0$. Следовательно, при $x \to 2-0$ разность $(x-2) \to 0$, оставаясь отрицательной. Тогда $\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{x}{x-2} = -\infty$, так как числитель стремится к 2, а знаменатель — к нулю.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x \to 0 \pm 0} \dfrac{1}{1+e^{1/x}}$.

Решение. а) Если $x \to 0+0$, то $x > 0$ и $\dfrac{1}{x} \to +\infty$. При этом $e^{1/x} \to \infty$ и $1 + e^{1/x} \to \infty$. Отсюда имеем:

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 0.$$

б) Если $x \to 0-0$, то $x < 0$ и $\dfrac{1}{x} \to -\infty$. Тогда $e^{1/x} \to 0$. Отсюда имеем:

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{1+e^{1/x}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Упражнения

1. Найти $\lim\limits_{x \to -2 \pm 0} \dfrac{x+2}{|x+2|} \cdot x$.

Отв. -2 при $x \to -2+0$; 2 при $x \to -2-0$.

2. Найти $\lim\limits_{x \to -1 \pm 0} \dfrac{x}{1+x}$.

Отв. $-\infty$ при $x \to -1+0$; $+\infty$ при $x \to -1-0$.

3. Найти $\lim\limits_{x \to 0 \pm 0} \dfrac{x}{|\operatorname{tg} x|}$.

Отв. 1 при $x \to 0+0$; -1 при $x \to 0-0$.

4. Найти $\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} \dfrac{1}{1+3^{-\frac{1}{1-x}}}$.

Отв. 0 при $x \to 1+0$; 1 при $x \to 1-0$.

5. Найти $\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1-x}$.

Отв. $-\dfrac{\pi}{2}$ при $x \to 1+0$; $\dfrac{\pi}{2}$ при $x \to 1-0$.

6. Найти $\lim\limits_{x \to -3 \pm 0} \dfrac{\sqrt{x+12}-3}{x^2-9}$.

Отв. $-\dfrac{1}{36}$ при $x \to -3+0$; $-\dfrac{1}{36}$ при $x \to -3-0$.

§ 11. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Понятие предела функции в точке позволяет описать важнейшее свойство функций — свойство непрерывности. Часто говорят о непрерывно изменяющемся давлении, о непрерывно текущем времени и т. п., понимая под этим постепенное изменение указанных переменных. Применительно к функции это означает, что малое изменение аргумента вызывает малое изменение функции. Пусть функция $y=f(x)$ определена в точке $x=x_0$ и ее окрестности. Придадим аргументу x новое значение, полагая $x=x_0+\Delta x$. Величина $\Delta x=x-x_0$ называется *приращением аргумента*. Тогда функция y принимает соответствующее значение $f(x_0+\Delta x)$. Разность

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

называется *приращением функции* $y=f(x)$ в точке $x=x_0$. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если бесконечно малому приращению Δx аргумента x в точке x_0 соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y=0$$

Например, функция $y=x^2$ непрерывна в любой точке x_0. Так как $\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\,\Delta x+(\Delta x)^2$, то если $\Delta x \to 0$, то и $\Delta y \to 0$, а это означает, что функция $y=x^2$ непрерывна. Используя выражение для Δy, можно записать

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

или

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0),$$

Однако $x_0+\Delta x=x$ и $x\longrightarrow x_0$ при $\Delta x\longrightarrow 0$, следовательно, последнее равенство можно записать так:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Таким образом, используя понятие предела функции, можно дать иное определение непрерывности функции.

Функция $y=f(x)$, определенная в точке $x=x_0$ и ее окрестности, называется непрерывной в этой точке, если предел функции при $x\longrightarrow x_0$ существует и равен значению функции при $x=x_0$, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Последнее равенство можно записать в другом виде:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0} x\right).$$

Итак, в случае непрерывности функции правомерной является перестановка знака функции и знака предела, которую часто используют при вычислении пределов. Отсюда следует простое п р а в и л о: чтобы найти предел элементарной функции, когда аргумент стремится к значению, принадлежащему области определения функции, нужно в функцию вместо аргумента подставить его предельное значение.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.

Р е ш е н и е. Известно, что

$$\frac{1}{x}\log_a(1+x)=\log_a(1+x)^{1/x}.$$

Поэтому искомый предел равен

$$\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{1/x}=\log_a\left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right\}.$$

Логарифмическая функция непрерывна, поэтому переставлены знак lim и знак $\log_a$. Так как

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e,$$

то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a\left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right\}=\log_a e.$$

Если, в частности, положить $a=e$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln e=1.$$

Таким образом, при $x\longrightarrow 0$ бесконечно малые $\ln(1+x)$ и x эквивалентны.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

Решение. Положим $z = a^x - 1$. Тогда при $x \to 0$ имеем $z \to 0$. Выразим x через z:

$$a^x = 1 + z \text{ и } x = \log_a (1 + z).$$

Учитывая решение примера 1, имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\log_a (1 + z)} = \frac{1}{\log_a e}.$$

Постоянная

$$\frac{1}{\log_a e} = \ln a$$

и окончательно имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Если, в частности, положить $a = e$, то

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Таким образом, при $x \to 0$ бесконечно малые $e^x - 1$ и x эквивалентны.

Непрерывность функции в точке $x = x_0$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что как только выполняется неравенство $|\Delta x| < \delta$, то выполняется и неравенство $|\Delta y| = |f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Для исследования данной функции на непрерывность в точке $x = x_0$ достаточно убедиться, что при $\Delta x \to 0$ также и $\Delta y \to 0$.

Пример 3. Показать непрерывность функции $y = \sin x$ на всей числовой оси.

Решение. Придадим некоторому значению x приращение Δx. Тогда соответствующее приращение функции

$$\Delta y = \sin (x + \Delta x) - \sin x.$$

Преобразуя это выражение, получим

$$\Delta y = \sin (x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Пусть $\Delta x \to 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sin \frac{\Delta x}{2} = 0.$$

Одновременно величина

$$\left| \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| \leqslant 1.$$

Отсюда вытекает, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ как предел произведения величины бесконечно малой на величину ограниченную. Следовательно, функция $y = \sin x$ непрерывна на всей числовой оси.

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в интервале*, если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Геометрически график непрерывной функции представляет собой сплошную линию без разрывов, т. е. ординаты графика, соответствующие двум точкам оси Ox, сколь угодно мало отличаются друг от друга, если расстояние между этими точками достаточно мало. В главе VI при рассмотрении свойств и графиков основных элементарных функций уже неявно предполагалось, что эти функции непрерывны. Таким образом, основные элементарные функции непрерывны в области своего определения.

§ 12. ДЕЙСТВИЯ НАД НЕПРЕРЫВНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Конечное число арифметических действий, а также операций взятия функции от функции над непрерывными в точке функциями приводят снова к функциям, непрерывным в этой точке. Справедливость этого утверждения доказывается следующими теоремами.

Теорема 1. *Алгебраическая сумма двух, трех и вообще конечного числа функций, непрерывных в некоторой точке, является функцией, непрерывной в той же точке.*

Доказательство. Пусть дано конечное число функций $u, v, \ldots, t$, непрерывных в точке $x=x_0$. Необходимо доказать, что их сумма $w=u\pm v\pm\ldots\pm t$ будет функцией, также непрерывной в точке $x=x_0$. В силу непрерывности слагаемых функций имеем

$$\lim_{x\to x_0} u=u_0,\quad \lim_{x\to x_0} v=v_0,\quad \ldots,\quad \lim_{x\to x_0} t=t_0,$$

где $u_0, v_0, \ldots, t_0$ — соответственно значения функций $u, v, \ldots, t$ в точке $x=x_0$. Учитывая правило 1 § 5, имеем

$$\lim_{x\to x_0} w=\lim_{x\to x_0}(u\pm v\pm\ldots\pm t)=\lim_{x\to x_0} u\pm\lim_{x\to x_0} v\pm\ldots\pm\lim_{x\to x_0} t=$$
$$=u_0\pm v_0\pm\ldots\pm t_0=w_0,$$

где w_0 — значение функции w при $x=x_0$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to x_0} w=w_0$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Произведение конечного числа функций, непрерывных в некоторой точке, является функцией, непрерывной в той же точке.*

Доказательство. Пусть дано конечное число функций $u, v, \ldots, t$, непрерывных в точке $x=x_0$. Требуется доказать, что их произведение $w=uv\ldots t$ будет функцией, непрерывной в точке $x=x_0$. Функции, входящие в сомножители, непрерывны, поэтому

$$\lim_{x\to x_0} u=u_0,\quad \lim_{x\to x_0} v=v_0,\quad \ldots,\quad \lim_{x\to x_0} t=t_0,$$

где $u_0, v_0, \ldots, t_0$ — соответственно значения функций $u, v, \ldots, t$ в точке $x=x_0$. Учитывая правило 2 § 5, имеем

$$\lim_{x\to x_0} w=\lim_{x\to x_0}(uv\ldots t)=\lim_{x\to x_0} u\cdot\lim_{x\to x_0} v\ldots\lim_{x\to x_0} t=u_0v_0\ldots t_0=w_0,$$

где w_0 — значение функции w при $x = x_0$. Таким образом, $\lim\limits_{x \to x_0} w = w_0$, что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Частное от деления двух функций, непрерывных в некоторой точке, является функцией, непрерывной в той же точке, при условии, что знаменатель дроби не обращается в нуль.*

Доказательство. Пусть даны две функции u и v, непрерывные в точке $x = x_0$, причем $\lim\limits_{x \to x_0} v \neq 0$. Требуется доказать, что частное от деления этих двух функций $w = u/v$ будет функцией, непрерывной в точке $x = x_0$. В силу непрерывности функций, находящихся в делимом и делителе, имеем

$$\lim_{x \to x_0} u = u_0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_0} v = v_0 \neq 0,$$

где u_0, v_0 — соответственно значения функций u, v в точке $x = x_0$. Учитывая правило 3 § 5, имеем

$$\lim_{x \to x_0} w = \lim_{x \to x_0} \frac{u}{v} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} u}{\lim\limits_{x \to x_0} v} = \frac{u_0}{v_0} = w_0,$$

где w_0 — значение функции w при $x = x_0$. Таким образом, $\lim\limits_{x \to x_0} w = w_0$, что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Сложная функция, состоящая из конечного числа непрерывных функций, является также непрерывной функцией.*

Доказательство. Пусть $y = f(u)$, а $u = \varphi(x)$, так что $y = f[\varphi(x)] = \psi(x)$, причем функция $\varphi(x)$ непрерывна при $x = x_0$, а функция $f(u)$ непрерывна при $u = u_0$, где $u_0 = \varphi(x_0)$. Требуется доказать, что функция $y = \psi(x)$ непрерывна при $x = x_0$. В силу того, что $u \longrightarrow u_0$ при $x \longrightarrow x_0$ и функция $f(u)$ непрерывна, имеем

$$\lim_{x \to x_0} y = \lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0).$$

С другой стороны,

$$u_0 = \varphi(x_0),$$

следовательно,

$$\lim_{x \to x_0} y = \lim_{x \to x_0} \psi(x) = f[\varphi(x_0)] = \psi(x_0).$$

Таким образом,

$$\lim_{x \to x_0} y = \lim_{x \to x_0} \psi(x) = \psi(x_0),$$

что и требовалось доказать.

Теорема доказана для случая цепи функций из двух звеньев. Однако вывод можно последовательно распространить на случай цепи, состоящей из любого конечного числа звеньев. Учитывая доказанные теоремы, можно утверждать, что любая элементарная функция непрерывна в тех интервалах, где она определена.

Пример 1. Доказать, что функция

$$f(x) = x^3 \cos^2 x + \frac{x^2}{x^2+1}$$

непрерывна при всех значениях x.

Решение. Воспользуемся теоремами 1, 2 и 3. Так как функция $\cos x$ непрерывна при всех значениях x, то ее квадрат есть функция, непрерывная при всех значениях x как произведение двух непрерывных функций: $\cos^2 x = \cos x \cdot \cos x$. Функция $\varphi(x) = x$ непрерывна всюду, а потому функция $\varphi_1(x) = x^3$ также всюду непрерывна как произведение непрерывных функций:

$$\varphi_1(x) = (x)^3 = x \cdot x \cdot x.$$

Произведение $x^3 \cos^2 x$ есть функция непрерывная как произведение непрерывных функций x^3 и $\cos^2 x$. Второе из слагаемых $\frac{x^4}{x^2-1}$ — функция непрерывная как частное двух непрерывных функций, причем знаменатель дроби не имеет действительных корней (уравнение $x^2+1=0$ не имеет действительных решений). Следовательно, заданная функция $f(x)$, являющаяся суммой двух непрерывных слагаемых функций, также непрерывная функция при всех значениях x, что и требовалось доказать.

Упражнения

1. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^2}{9-x^2}$.

Отв. Функция непрерывна при всех значениях x, кроме значений $x_1 = -3$ и $x_2 = 3$.

2. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{\sin x}{1-x^2}$.

Отв. Функция непрерывна при всех значениях x, кроме $x = \pm 1$.

3. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^2+x+1}{\sin x}$.

Отв. Функция непрерывна при всех значениях x, кроме $x = n\pi$, где n — любое целое число.

§ 13. ТОЧКИ РАЗРЫВА

График функции $y = \frac{1}{x}$ в окрестности точки $x = 0$ разрывается на отдельные кривые. Аналогичное явление можно видеть и на графиках функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ и многих других. Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются *точками разрыва функции*.

Разрыв в точке x_0 имеет место, если нарушено хотя бы одно из следующих трех условий непрерывности функции:

1) в точке x_0 функция $y = f(x)$ не имеет конечного предела;

2) функция не существует в точке x_0;

3) предел функции в точке x_0 существует, но не совпадает с ее значением в этой точке, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

Разрывы бывают в следующих случаях:

1. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует, но функция $f(x)$ в точке $x = x_0$ не определена или определена, но так, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Разрыв в точке $x = x_0$ называется *устранимым*. В этом случае для устранения разрыва надо доопределить функцию в точке x_0 или изменить ее значение в этой точке так, чтобы $f(x_0)$ было равно пределу $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Так, например, функция $y = \frac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$ не определена. Но так как $\lim \frac{\sin x}{x} = 1$, то можно рассмотреть функцию, определенную следующим образом:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad \text{если} \quad x \neq 0;$$
$$f(0) = 1.$$

Таким образом, функция $y = \frac{\sin x}{x}$ доопределена и является непрерывной.

2. Если при $x \longrightarrow x_0$ слева и справа существуют конечные односторонние пределы функции $f(x)$:

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = A_1 \text{ и } \lim_{x \to x_0 +} f(x) = A_2,$$

но $A_1 \neq A_2$. В этом случае точка $x = x_0$ называется *точкой конечного разрыва* или *точкой разрыва первого рода* и функция $f(x)$ имеет в точке x_0 скачок $|A_1 - A_2|$.

3. Если конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует, а функция является бесконечно большой величиной при $x \longrightarrow x_0$, т. е. $f(x) \longrightarrow \infty$ при $x \longrightarrow x_0$, то точка $x = x_0$ называется *точкой бесконечного разрыва* или *точкой разрыва второго рода*. Точки разрыва второго рода являются наиболее характерными и часто встречающимися. Разрывы первого и второго рода являются неустранимыми.

Пример 1. Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции

$$y = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}.$$

Решение. Функцию можно представить как сложную:

$$y = \frac{1}{1 + 2^u}, \quad \text{где} \quad u = \frac{1}{x-1}.$$

Знаменатель первой дроби нигде в нуль не обращается. Функция $y = \frac{1}{1+2^u}$ — непрерывная функция при любом значении u. Функция

$u=\frac{1}{x-1}$ непрерывна для всех значений x, кроме $x=1$. Таким образом, данная сложная функция непрерывна для всех значений x, кроме $x=1$.

Если $x\to 1$ слева, то $x-1<0$, следовательно, $\frac{1}{x-1}\to-\infty$, а $2^{\frac{1}{1-x}}\to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 1-}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=\frac{1}{1+0}=1.$$

Если $x\to 1$ справа, то $x-1>0$, следовательно, $\frac{1}{x-1}\to+\infty$ и $2^{\frac{1}{x-1}}\to+\infty$, поэтому

$$\lim_{x\to 1+}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=0.$$

Таким образом, пределы справа и слева существуют, но не одинаковы, поэтому точка $x_0=1$ является точкой разрыва первого рода.

Пример 2. Установить вид разрыва функции $y=\frac{1}{x}$ в точке $x=0$.

Решение. Левосторонний предел функции $\lim\limits_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty$, а ее правосторонний предел $\lim\limits_{x\to 0+}=+\infty$. Таким образом, не существует ни предел слева, ни предел справа, а поэтому точка $x=0$ является точкой разрыва второго рода.

В силу доказанных в § 12 четырех теорем можно утверждать, что точками разрыва элементарной функции могут быть только те значения независимой переменной, при которых какие-нибудь из элементов, составляющих функцию, делаются неопределенными или при которых обращаются в нуль знаменатели входящих в выражение функции дробей.

Упражнения

1. Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции

$$y=\frac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}.$$

Отв. Функция имеет разрыв первого рода в точке $x=2$.

2. Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции

$$y=\frac{1}{3+5^{\frac{1}{x}}}.$$

Отв. Функция имеет разрыв первого рода в точке $x=0$.

3. Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции

$$y=\frac{5}{2+7^{\frac{4}{5-x}}}.$$

Отв. Функция имеет разрыв первого рода в точке $x=5$.

4. Установить вид разрыва функции $y=\dfrac{1}{x-3}$ в точке $x=3$.

Отв. Разрыв второго рода.

5. Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции $y=\dfrac{1}{x^2-1}$.

Отв. Функция имеет разрыв второго рода в точках $x=\pm 1$.

6. Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции $y=\dfrac{x^3-8}{x-2}$.

Отв. Функция имеет устранимый разрыв в точке $x=2$.

§ 14. СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Общие свойства непрерывных функций формулируются в виде следующих теорем.

Теорема Вейерштрасса. *Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она имеет на этом отрезке по крайней мере одно наибольшее и одно наименьшее значение.* Иначе говоря, на отрезке $[a, b]$ найдутся такие точки x_1 и x_2, что при всех значениях x, принадлежащих отрезку $[a, b]$, имеют место соотношения

$$f(x)\leqslant f(x_1),\quad f(x)\geqslant f(x_2),$$

и, следовательно, значение $M=f(x_1)$ является наибольшим значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, а значение $m=f(x_2)$ — наименьшим значением функции на этом отрезке (рис. 7.10).

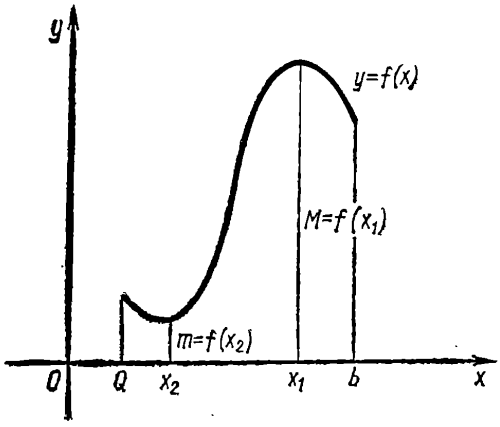

Рис. 7.10

Первая теорема Больцано — Коши. *Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, т. е. $f(a)>0$, $f(b)<0$ или $f(a)<0$, $f(b)>0$. Тогда между a и b найдется такая точка c, в которой функция обращается в нуль, т. е. $f(c)=0$.* Геометрический смысл этой теоремы очень прост: если график непрерывной функции переходит с одной стороны оси Ox на другую, то он пересекает ось Ox (рис. 7.11).

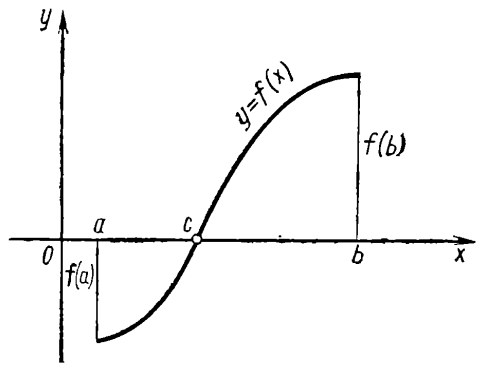

Рис. 7.11

Вторая теорема Больцано — Коши. *Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает неравные значения $f(a)=A$ и $f(b)=B$. Тогда, каково*

бы ни было число C, *лежащее между* A *и* B *так, что* $A < C < B$ *или* $A > C > B$, *найдется такая точка* c *между* a *и* b, *что* $f(c) = C$. Это свойство означает, что функция, непрерывная на отрезке, переходя от одного значения к другому, принимает все промежуточные значения.

Очевидно, что первая теорема Больцано—Коши есть частный случай второй теоремы, так как если A и B принимают значения разных знаков, то в качестве C можно взять нуль.

ГЛАВА VIII

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

§ 1. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Понятие производной часто используется при решении многих задач физики, механики и техники.

Для примера рассмотрим задачи о скорости и касательной. Эти задачи исторически связаны с возникновением понятия производной.

1. Задача о скорости прямолинейного движения. Пусть тело совершает прямолинейное движение и за время t проходит путь s, т. е. известно расстояние s как функция времени t:

$$s = f(t).$$

Последнее равенство называется *уравнением движения*, а график функции $s = f(t)$ называется *кривой движения*. Рассмотрим движение тела в течение интервала времени Δt от некоторого момента t_0 до момента $t_0 + \Delta t$.

Путь, пройденный телом за время Δt, обозначим через Δs. За время t_0 тело прошло путь $s_0 = f(t_0)$, а за время $t_0 + \Delta t$ — путь $s_0 + \Delta s = f(t_0 + \Delta t)$. Следовательно, за время Δt тело прошло путь

$$\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0).$$

Отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ называется *средней скоростью* движения тела за время Δt и обозначается $v_{ср}$:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v_{ср}.$$

Если движение равномерное, то s есть линейная функция от t:

$$s = v_0 t + s_0.$$

В этом случае $\Delta s = v_0 \Delta t$ и средняя скорость

$$v_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = v_0,$$

показывающая, сколько единиц пути s приходится на единицу времени t, является величиной постоянной, не зависящей от того, какой момент времени $t = t_0$ берется и какое взято приращение времени Δt. В этом случае отношение $v_0 = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ называется *скоростью равномерного движения*.

Если тело движется неравномерно, то величина средней скорости $v_{ср}$ является величиной переменной, зависящей от Δt. Поэтому отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ не всегда достаточно полно характеризует движение.

Введем понятие мгновенной скорости движения тела в момент t_0. Очевидно, что чем меньше промежуток времени Δt, тем лучше величина $v_{ср}$ характеризует движение тела в момент времени t_0. Исходя из этого, вычисляют предел, к которому стремится средняя скорость $v_{ср}$ при $\Delta t \to 0$, т. е.

$$\lim_{\Delta t \to 0} v_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t} = v.$$

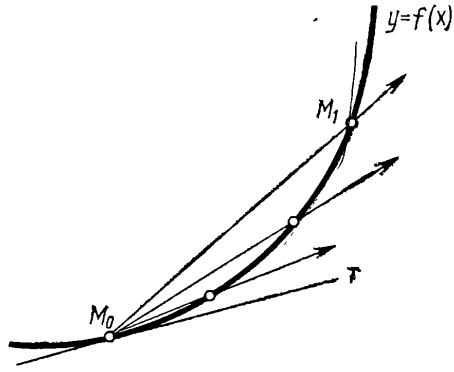

Рис. 8.1

Величина v характеризует скорость движения тела в момент $t = t_0$ и называется *мгновенной* или *истинной* скоростью тела в данный момент.

Скоростью v прямолинейного движения в данный момент времени $t = t_0$ называется предел средней скорости $v_{ср}$, соответствующий отрезку $[t_0, t_0+\Delta t]$ при стремлении Δt к нулю.

Рассмотрим, например, закон свободного падения тела. Известно, что в случае равномерно-ускоренного движения зависимость пути от времени выражается формулой

$$s = \frac{1}{2} g t^2,$$

где g — постоянная; s — путь, пройденный телом за время t. Тогда средняя скорость падения тела

$$v_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} g (t+\Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t^2}{\Delta t} = \frac{1}{2} g \frac{t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \frac{1}{2} g (2t + \Delta t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} g (2t + \Delta t) = gt.$$

Итак, скорость свободного падения тела в момент времени t определяется формулой

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = gt.$$

2. Задача о касательной к кривой. Пусть дана кривая $y = f(x)$ и на ней точка M (рис. 8.1). Установим понятие касательной к кривой в ее точке M_0. На кривой $y = f(x)$ (рис. 8.1) кроме точки M_0 возьмем точку M_1 и проведем секущую M_0M_1. При перемещении точки M_1 вдоль кривой секущая M_0M_1 будет вращаться вокруг точки M_0.

Касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 называется предельное положение M_0T секущей MM_1, когда точка M_1, перемещаясь

вдоль по кривой, совпадает с точкой M_0. Иными словами, угол M_1M_0T стремится к нулю при стремлении к нулю длины хорды MM_1. Для уточнения положения касательной необходимо знать ее угловой коэффициент $\operatorname{tg}\alpha$ в точке касания. Придадим абсциссе x_0 точки M_0 (рис. 8.2) приращение Δx и перейдем от точки M_0 кривой к точке M_1 с абсциссой $x_0+\Delta x$ и ординатой $y_0+\Delta y=f(x_0+\Delta x)$.

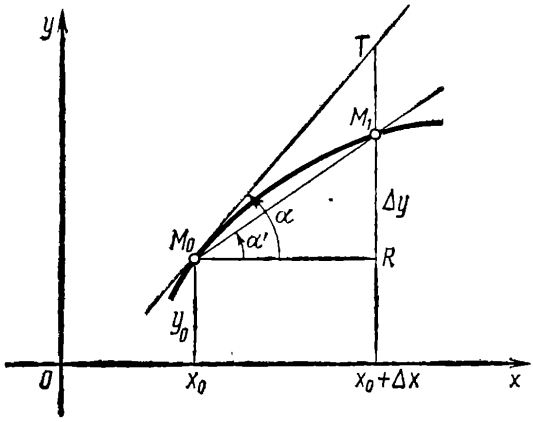

Рис. 8.2

Угловой коэффициент секущей M_0M_1 можно определить из прямоугольного треугольника M_0RM_1 (рис. 8.2). Катет M_0R равен приращению абсциссы Δx, а катет RM_1, очевидно, есть соответствующее приращение ординаты

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

поэтому

$$\operatorname{tg}\alpha'=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Для того чтобы найти угловой коэффициент касательной, необходимо перейти к пределу при $\Delta x\to 0$, так как это равносильно тому, что хорда $MM_1\to 0$. При этом $\alpha'\to\alpha$ и, так как функция непрерывна, $\operatorname{tg}\alpha'\to\operatorname{tg}\alpha$.

Таким образом,

$$\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\alpha'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Можно было бы увеличить число задач, решение которых приводит к нахождению пределов того же типа, что v и $\operatorname{tg}\alpha$. Сопоставляя действия, которые осуществляются при решении рассмотренных задач, видим, что если отвлечься от их содержания, то по существу делалось одно и то же: приращение функции делилось на приращение независимой переменной и затем вычислялся предел их отношения.

Рассмотрим общий случай. Пусть дана произвольная функция $y=f(x)$, определенная в некотором промежутке. Пусть x_0 — точка этого промежутка. Придадим x_0 приращение Δx и найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

Отношение приращения функции Δy к приращению аргумента Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=v_{\text{ср}}$$

называется *средней скоростью изменения функции* $y=f(x)$ на отрезке $[x_0,\ x_0+\Delta x]$. Чем меньше рассматриваемый отрезок, тем точнее

$v_{ср}$ характеризует изменение функции, поэтому заставляем Δx стремиться к нулю или находим предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$. Если этот предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ существует, то он называется *скоростью изменения функции* в точке $x = x_0$.

Таким образом, скоростью изменения функции в данной точке $x = x_0$ называется предел средней скорости изменения функции на отрезке $[x_0, x_0 + \Delta x]$ при стремлении Δx к нулю:

$$v = \lim_{\Delta x \to 0} v_{ср} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Указанный предел называется *производной* от функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ и обозначается $f'(x_0)$. Если производная существует в каждой точке x отрезка $[a, b]$, то она, очевидно, зависит от значения x и поэтому называется также производной функцией от данной функции $y = f(x)$ и символически обозначается так: $f'(x)$ или y', y'_x. Итак, *производной данной функции* называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при произвольном стремлении этого приращения к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Действие вычисления производной называют *дифференцированием*, а функцию, имеющую производную в некоторой точке x_0, называют *дифференцируемой в точке* x_0. Если функция имеет производную в каждой точке промежутка, то она называется *дифференцируемой в промежутке*.

Скорость движения

$$v = f'(t) \text{ или } v = s'_t.$$

Аналогично, угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x) \text{ или } \operatorname{tg} \alpha = y'_x.$$

Таким образом, *геометрический смысл производной* заключается в том, что угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, равен значению производной $f'(x_0)$ (рис. 8.2).

Пример 1. Найти производную функции $y = x^3$.

Решение. Найдем приращение функции:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Разделив на Δx, имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = 3x^2 + (3x + \Delta x)\Delta x.$$

Переходя к пределу, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [3x^2 + (3x + \Delta x)\,\Delta x] = 3x^2.$$

Следовательно, производная функции $y = x^3$ есть $y' = 3x^2$.

Пример 2. Найти касательную к параболе $y = x^2 + 1$ в точке $A(1; 2)$.

Решение. Вычислим производную данной функции:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x+\Delta x)^2 + 1] - [x^2 + 1]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot \Delta x}{\Delta x} = 2x.$$

В точке касания A имеем $x = 1$ и, следовательно, угловой коэффициент касательной

$$k = \operatorname{tg} \alpha = y'_{x=1} = 2 \cdot 1 = 2.$$

Воспользовавшись уравнением прямой линии с угловым коэффициентом

$$y - y_1 = k\,(x - x_1),$$

получим

$$(y - 2) = 2\,(x - 1),$$

или

$$2x - y = 0.$$

Установим связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности функции в точке.

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ имеет конечную производную в точке x_0, то функция $y = f(x)$ непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Пусть при $x = x_0$ существует конечная производная

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Согласно определению предела это равенство означает, что при $\Delta x \longrightarrow 0$ отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ отличается от своего предела $f'(x_0)$ на бесконечно малую α, т. е.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,$$

откуда

$$\Delta y = [f'(x_0) + \alpha]\,\Delta x = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где $\alpha \longrightarrow 0$ при $\Delta x \longrightarrow 0$. При $\Delta x \longrightarrow 0$ оба слагаемых в правой части равенства являются величинами бесконечно малыми, следовательно, $\Delta y \longrightarrow 0$. Это означает непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0, что и требовалось доказать.

Обратное утверждение неверно, т. е. функция может быть непрерывной в точке, не являясь дифференцируемой в этой точке. Так, функция $y = \sqrt[3]{x^2}$, непрерывная в точке $x = 0$, при этом же значении x производной не имеет.

Упражнения

1. Найти производную функции $y=x^2$ при $x=3$.
Отв. 6.
2. Точка движется по прямой по закону $s=t^3$, где s — путь (см), а t — время (с). Вычислить скорость движения точки в момент $t=2$ с.
Отв. 12 см/с.
3. Найти производную функции $y=\dfrac{2x+1}{3x+1}$ при $x=1$.
Отв. —1/16.
4. Найти производную функции $y=\sqrt{x}$ при $x=9$.
Отв. 1/6.
5. Закон движения точки по прямой описывается уравнением $s=t^3-3t^2+3t+5$, где s — путь (м); t — время (с).
В какие моменты времени t скорость точки равна нулю?
Отв. $v=0$ при $t=1$ с.

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ

Дифференцирование функций — это действие отыскания их производных, т. е. вычисление

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

При вычислении производной y' придерживаются следующей схемы:
1) выбирают некоторое значение x, придают ему приращение Δx и находят значение функции $f(x+\Delta x)$;
2) вычисляют соответствующее приращение функции

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x);$$

3) находят отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ и, если возможно, упрощают его;
4) вычисляют предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Такое непосредственное вычисление предела в большинстве случаев громоздко и трудоемко. Чтобы не выполнять каждый раз предельного перехода, необходимо знать правила дифференцирования результатов арифметических действий, дифференцирования сложной и обратной функций, а также производные основных элементарных функций.

Прежде чем вычислять производные основных элементарных функций, рассмотрим правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного, предполагая, что функции — компоненты, т. е. слагаемые, сомножители, делимое и делитель непрерывны и имеют производные при рассматриваемых значениях независимой переменной.

Теорема 1. *Производная алгебраической суммы конечного числа функций равна алгебраической сумме производных от этих функций.*

Доказательство. Пусть дана функция

$$y=u\pm v\pm\ldots\pm w,$$

где $u=u(x)$, $v=v(x)$, ..., $w=w(x)$ — различные функции x. Докажем, что

$$y'=u'\pm v'\pm\ldots\pm w'.$$

Аргументу x придадим приращение Δx и найдем соответствующие приращения функций:

$$\Delta u=u(x+\Delta x)-u(x),$$
$$\Delta v=v(x+\Delta x)-v(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta w=w(x+\Delta x)-w(x).$$

Функция y также получит приращение:

$$\Delta y=\Delta u\pm\Delta v\pm\ldots\pm\Delta w.$$

Разделим обе части равенства на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x}\pm\ldots\pm\frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x}\pm\ldots\pm\frac{\Delta w}{\Delta x}\right)=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\pm\ldots\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Согласно определению производной

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y',\quad\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u';\quad\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v',\quad\ldots,\quad\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x}=w'.$$

Следовательно,

$$y'=u'\pm v'\pm\ldots\pm w',$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Производная произведения двух функций равна произведению производной первой функции на вторую плюс произведение первой функции на производную второй.*

Доказательство. Пусть дана функция

$$y=uv,$$

где $u=u(x)$, $v=v(x)$. Докажем, что

$$y'=(uv)'=u'v+v'u.$$

Придадим аргументу x приращение Δx и найдем соответствующие приращения функций:

$$\Delta u=u(x+\Delta x)-u(x);\quad\Delta v=v(x+\Delta x)-v(x).$$

Функция y получит приращение

$$\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv=uv+\Delta uv+u\Delta v+\Delta u\,\Delta v-uv,$$

или

$$\Delta y=\Delta u\,v+u\,\Delta v+\Delta u\,\Delta v.$$

В результате деления обеих частей равенства на Δx имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}v+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v.$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$ и учитывая, что при этом также и $\Delta v\to 0$ как приращение непрерывной функции, получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}v+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v.$$

Согласно определению производной

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y',\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u',\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'.$$

Следовательно,

$$y'=u'v+uv'+u'\cdot 0=u'v+v'u,$$

что и требовалось доказать.

Правило дифференцирования произведения двух функций обобщается на случай большого числа функций-сомножителей. Так, если функция y является произведением трех функций, т. е. $y=uvw$, то

$$y'=(uvw)'=(uv)'w+(uv)w'=(u'v+v'u)w+uvw'=u'vw+uv'w+uvw'.$$

Производная произведения трех функций равна сумме трех слагаемых, причем каждое из них является произведением двух из данных функций на производную третьей.

Следствие. Если один из множителей есть постоянная величина, например $v=c$, то

$$y'=(cu)'=c'u+cu'=cu',$$

так как производная от постоянной величины равна нулю. Отсюда вытекает следующее простое правило: *постоянный множитель можно выносить за знак производной.*

Теорема 3. *Производная частного двух функций равна дроби, знаменатель которой равен квадрату делителя, а числитель — разности между произведением производной делимого на делитель и произведением делимого на производную делителя.*

Доказательство. Пусть дана функция

$$y=\frac{u}{v},$$

где $u=u(x)$, $v=v(x)$, причем $v(x)\neq 0$. Докажем, что

$$y'=\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Аргументу x придадим приращение Δx и найдем соответствующие приращения функций:

$$\Delta u=u(x+\Delta x)-u(x);\qquad \Delta v=v(x+\Delta x)-v(x).$$

Функция y получит приращение

$$\Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv+v\,\Delta u - uv - u\,\Delta v}{v(v+\Delta v)} = \frac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{v(v+\Delta v)}.$$

Разделим обе части равенства на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и учитывая, что при этом также и $\Delta v \to 0$ (как приращение непрерывной функции), получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} (v+\Delta v)\, v} = \frac{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{\left(v + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v\right) v}.$$

Согласно определению производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'; \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'.$$

Следовательно,

$$y' = \frac{vu' - uv'}{(v+0)\,v} = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

что и требовалось доказать.

В частном случае, если функция $y = \frac{c}{v}$, где c — постоянная величина, имеем

$$y' = \left(\frac{c}{v}\right)' = \frac{c'v - cv'}{v^2} = -c\frac{v'}{v^2}.$$

Если же $y = \frac{u}{c}$, где c — постоянная величина, то

$$y' = \left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{1}{c}u' = \frac{u'}{c}.$$

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ И ОБРАТНОЙ ФУНКЦИЙ

Пусть дана функция $y = f(z)$, где $z = \varphi(x)$, причем функция $f(z)$ дифференцируема в своей области определения, а функция $\varphi(x)$ имеет производную в своей области определения. Правило дифференцирования сложной функции $y = f[\varphi(x)]$ можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Производная сложной функции $y = f[\varphi(x)]$ по аргументу x равна произведению производной функции y по промежуточной переменной $z = \varphi(x)$ на производную этой переменной по аргументу x, т. е.*

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x.$$

Доказательство. Придадим аргументу x приращение Δx. Как следствие этого промежуточная переменная z получит прира-

щение Δz, которое, в свою очередь, вызовет изменение функции y на некоторую величину Δy, где

$$\Delta y = f(z + \Delta z) - f(z).$$

Представим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в виде $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}$. Функция $z = \varphi(x)$ непрерывна при $\Delta x \to 0$, поэтому $\Delta z \to 0$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x},$$

откуда

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x,$$

что и требовалось доказать.

Предположим, что y как функция независимой переменной x состоит из трех функций, т. е.

$$y = f(z), \quad z = \varphi(u), \quad u = \psi(x).$$

Согласно доказанной теореме

$$y'_x = y'_z z'_x,$$

где z'_x — производная от z, рассматриваемая как функция от независимой переменной x. На основании той же теоремы

$$z'_x = z'_u u'_x.$$

Подставляя это выражение в предыдущее равенство, получаем

$$y' = y'_z z'_u u'_x.$$

Аналогично выводится формула для любого числа промежуточных аргументов. Производная сложной функции равна произведению производных от основных элементарных функций, ее составляющих.

Пусть $y = f(x)$. Разрешая это уравнение относительно x, найдем функцию, обратную данной $x = \varphi(y)$. Если известна производная от данной функции, то можно получить выражение производной обратной функции.

Теорема. *Если для функции $y = f(x)$ существует однозначная непрерывная обратная функция $x = \varphi(y)$, причем функция $y = f(x)$ дифференцируема, то в точках, где производная $f'(x) \neq 0$, существует производная обратной функции, равная обратной величине производной данной функции, т. е.*

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Доказательство. Рассмотрим обратную функцию $x = \varphi(y)$. Придадим аргументу y приращение Δy, тогда

$$\Delta x = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y).$$

Так как $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, то при $\Delta y \neq 0$ и $\Delta x \neq 0$. Ввиду непрерывности функции $\varphi(y)$ при $\Delta y \to 0$, $\Delta x \to 0$. Тогда при

$\Delta y \neq 0$ имеем

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Учитывая, что по условию теоремы

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \neq 0,$$

получаем

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

или

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)},$$

что и требовалось доказать.

Итак, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.

§ 4. ПРОИЗВОДНЫЕ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Производная степенной функции. Пусть дана степенная функция $y = x^n$, где n — любое число. Придадим аргументу x приращение Δx. Тогда функция y получит приращение

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = x^n \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^n - 1 \right].$$

Найдем отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^n \frac{\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^n - 1 \right]}{\Delta x} = x^{n-1} \frac{\left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^n - 1 \right]}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \longrightarrow 0$, имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{n-1} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^n - 1}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Обозначим $\frac{\Delta x}{x}$ через h, тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{n-1} \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^n - 1}{h},$$

так как если $\Delta x \longrightarrow 0$, то $\frac{\Delta x}{x} = h \longrightarrow 0$.

Найдем $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(1+h)^n - 1}{h}$. Пусть $(1+h)^n - 1 = z$. Тогда при $h \longrightarrow 0$ и $z \longrightarrow 0$. Кроме того, $(1+h)^n = 1 + z$, откуда

$$n \ln (1+h) = \ln (1+z).$$

Из § 11 гл. VII известно, что $\ln(1+z)$ и z — эквивалентные бесконечно малые величины при $z \to 0$. То же можно утверждать и о величинах $n\ln(1+h)$ и nh при $h \to 0$. Отсюда в силу последнего равенства следует эквивалентность величин z и nh, т. е. при любом постоянном числе n

$$\lim_{h \to 0} \frac{z}{nh} = 1.$$

Тогда $\lim\limits_{h \to 0} \frac{z}{h} = n$, откуда, заменяя z его значением, получаем

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^n - 1}{h} = n.$$

Таким образом,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = x^{n-1} n.$$

Согласно определению производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y',$$

следовательно,

$$y' = (x^n)' = nx^{n-1}. \tag{8.1}$$

Итак, производная степенной функции равна показателю степени, умноженному на степень с показателем на единицу меньше данного.

Пример 1. Найти производную функции $y = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 4$.

Решение. Основываясь на теореме 1, доказанной в § 2, имеем

$$y' = (5x^3)' - (2x^2)' + (3x)' - 4'.$$

Далее, учитывая следствие теоремы 2 § 2 и то, что производная постоянной величины равна нулю, получаем

$$y' = 5(x^3)' - 2(x^2)' - 3(x)'.$$

Наконец, используя формулу (8.1), приходим к окончательному результату:

$$y = 5 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 3 \cdot 1 = 15x^2 - 4x + 3.$$

Пример 2. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$.

Решение. Данную функцию представим в виде $y = x^{1/2}$. На основании формулы (8.1) получаем

$$y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2} x^{-1/2},$$

или окончательно

$$y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2. Производные тригонометрических функций. Пусть дана функция $y = \sin x$. Придадим аргументу x приращение Δx. Тогда функ-

ция y получит приращение Δy, где

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Находим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\,\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, имеем

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Но $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$ (первый замечательный предел), а

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos(x+0) = \cos x.$$

Следовательно, искомая производная

$$y' = (\sin x)' = \cos x. \tag{8.2}$$

Таким образом, производная синуса равна косинусу.

Пусть дана функция $y = \cos x$. Так как $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, то, полагая $x+\frac{\pi}{2} = z$, на основании правила дифференцирования сложной функции имеем

$$y'_x = y'_z \cdot z'_x = (\sin z)'\left(x+\frac{\pi}{2}\right)' = \cos z\cdot 1 = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

Следовательно, искомая производная

$$y' = (\cos x)' = -\sin x. \tag{8.3}$$

Таким образом, производная косинуса равна синусу со знаком минус.

Пусть дана функция $y = \operatorname{tg} x$. Так как $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, то, применяя правило дифференцирования частного, получаем

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Следовательно, искомая производная

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{8.4}$$

Таким образом, производная тангенса равна квадрату секанса.

Пусть дана функция $y=\operatorname{ctg} x$. Так как $y=\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$, то, применяя правило дифференцирования частного, получаем

$$y'=(\operatorname{ctg} x)'=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}=\frac{(-\sin x)\sin x-\cos x\cos x}{\sin^2 x}=$$
$$=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Следовательно, искомая производная

$$y'=(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}. \tag{8.5}$$

Таким образом, производная котангенса равна квадрату косеканса со знаком минус.

Пример 3. Найти производную функции $y=x^3\cos x$.

Решение. По правилу дифференцирования произведения имеем

$$y'=(x^3)'\cos x+x^3(\cos x)'.$$

Воспользовавшись формулами (8.1) и (8.3), получим

$$y'=3x^2\cos x+x^3(-\sin x)=3x^2\cos x-x^3\sin x.$$

3. Производные обратных тригонометрических функций. Пусть дана функция $y=\arcsin x$, которая является обратной для функции $x=\sin y$. Применяя правило дифференцирования обратной функции, получим

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}.$$

Чтобы получить выражение производной через независимую переменную x, надо вместо $\cos y$ подставить его выражение через x:

$$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}.$$

Следовательно, искомая производная

$$y'=(\arcsin x)'\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{8.6}$$

Пусть дана функция $y=\arccos x$, которая является обратной для функции $x=\cos y$. Применяя правило дифференцирования обратной функции, получим

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(\cos y)'}=-\frac{1}{\sin y}.$$

Чтобы получить выражение производной через независимую переменную x, надо вместо $\sin y$ подставить его выражение через x:

$$\sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}=\sqrt{1-x^2}.$$

Следовательно, искомая производная

$$y'=(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{8.7}$$

Пусть дана функция $y=\operatorname{arctg} x$, которая является обратной для функции $x=\operatorname{tg} y$. Применяя правило дифференцирования обратной функции, получим

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(\operatorname{tg} y)'}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\cos^2 y.$$

Чтобы получить выражение производной через независимую переменную x, надо вместо $\cos^2 y$ подставить его выражение через x, учитывая, что $x=\operatorname{tg} y$. В результате получим

$$\cos^2 y=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Следовательно, искомая производная

$$y'=(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}. \tag{8.8}$$

Пусть дана функция $y=\operatorname{arcctg} x$, которая является обратной для функции $x=\operatorname{ctg} y$. Применяя правило дифференцирования обратной функции, получим

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'}=\frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 y}}=-\sin^2 y.$$

Чтобы получить выражение производной через независимую переменную x, надо вместо $\sin^2 y$ подставить его выражение через x, учитывая, что $x=\operatorname{ctg} y$. В результате получим

$$\sin^2 y=\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Следовательно, искомая производная

$$y'=(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}. \tag{8.9}$$

Пример 4. Найти производную функции $y=\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

Решение. Применяя правило дифференцирования дроби, имеем

$$y'=\frac{(\operatorname{arctg} x)'\,x^3-(x^3)'\operatorname{arctg} x}{x^6}.$$

Воспользовавшись формулами (8.1) и (8.8), получим

$$y'=\frac{\frac{1}{1+x^2}\,x^3-3x^2\operatorname{arctg} x}{x^6}=\frac{x-3(1+x^2)\operatorname{arctg} x}{x^4(1+x^2)}.$$

Пример 5. Найти производную функции $y=\sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

Решение. По правилу дифференцирования произведения

$$y'=(\sqrt{1-x^2})'\arcsin x+\sqrt{1-x^2}\,(\arcsin x)'.$$

При вычислении производной от $\sqrt{1-x^2}$ принимаем $1-x^2=z$. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$$(\sqrt{1-x^2})'=(\sqrt{z})'(1-x^2)'=\frac{1}{2\sqrt{z}}(-2x).$$

Подставляя вместо z его значение через независимую переменную x, имеем

$$(\sqrt{1-x^2})'=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Воспользовавшись формулой (8.6), окончательно получим

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x+\sqrt{1-x^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1-\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4. Производные логарифмической и показательной функций. Пусть дана функция $y=\log_a x$. Аргументу x придадим приращение Δx. Тогда функция y получит приращение

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Найдем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{x}\,\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, имеем

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}\right\}.$$

Так как величина $1/x$ не зависит от изменения Δx, то ее можно вынести за знак предела. Предел второго множителя был найден ранее (см. § 11, пример 1):

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}=\log_a e.$$

Следовательно, искомая производная

$$y'=(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e. \tag{8.10}$$

В частности, при $a=e$ производная натурального логарифма

$$y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}. \tag{8.11}$$

Таким образом, производная натурального логарифма равна обратной величине аргумента. Простота последнего результата делает

натуральные логарифмы наиболее удобными для теоретических исследований, в которых используются производные.

Пусть дана функция $y=a^x$, которая является обратной для функции $x=\log_a y$. Применяя правило дифференцирования обратной функции, получим

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{(\log_a y)'}=\frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e}=\frac{y}{\log_a e}.$$

Известно, что

$$\ln a=\log_e a=\frac{1}{\log_a e}.$$

Следовательно,

$$y'_x=\frac{y}{\log_a e}=y\ln a.$$

Заменяя y его значением, получаем

$$y'=(a^x)'=a^x\ln a. \tag{8.12}$$

Таким образом, производная показательной функции равна произведению этой функции на натуральный логарифм основания. В частности, при $a=e$ получаем

$$y'=(e^x)'=e^x, \tag{8.13}$$

так как $\ln e=1$. Следовательно, функция $y=e^x$ при дифференцировании не меняется.

Пример 6. Найти производную функции $y=\ln(x^3+7x+2)$.

Решение. Пусть $x^3+7x+2=z$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y'=[\ln(x^3+7x+2)]'=(\ln z)'(x^3+7x+2)'.$$

Воспользовавшись формулой (8.11) и правилом дифференцирования суммы, получим

$$y'=\frac{1}{z}(3x^2+7).$$

Подставляя вместо z его значение через независимую переменную x, получаем

$$y'=\frac{3x^2+7}{x^3+7x+2}.$$

Пример 7. Найти производную функции $y=e^{\arcsin x}$.

Решение. Пусть $\arcsin x=z$. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y'=(e^{\arcsin x})'=(e^z)'(\arcsin x)'.$$

Воспользовавшись формулами (8.6) и (8.13), получаем

$$y'=e^z\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Подставляя вместо z его значение через независимую переменную x, находим

$$y' = \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Пример 8. Найти производную функции $y = 3^{\operatorname{tg}^4(x^2+5x)}$.

Решение. Сначала применяем формулу (8.12) дифференцирования показательной функции, причем за вспомогательную функцию z принимаем $z = \operatorname{tg}^4(x^2+5x)$, затем воспользуемся формулой (8.1) дифференцирования степенной функции, причем за вспомогательную функцию v принимаем $v = \operatorname{tg}(x^2+5x)$, далее применяем формулу (8.4) дифференцирования тангенса, причем за вспомогательную функцию u принимаем $u = x^2+5x$, и, наконец, находим производную от многочлена. Таким образом,

$$y'_x = y'_z z'_v \cdot v'_u \cdot u'_x = (3^z)'(v^4)'(\operatorname{tg} u)'(x^2+5x)' =$$
$$= 3^z \ln 3 \cdot 4v^3 \frac{1}{\cos^2 u}(2x+5).$$

Подставляя вместо переменных z, v, u их значения через независимую переменную x, окончательно получаем

$$y' = 3^{\operatorname{tg}^4(x^2+5x)} \ln 3 \cdot 4 \operatorname{tg}^3(x^2+5x) \frac{1}{\cos^2(x^2+5x)}(2x+5).$$

Таким образом, зная правила дифференцирования результатов арифметических действий, сложной и обратной функций, а также производные основных элементарных функций, можно находить производные любых элементарных функций. Объединим полученные формулы дифференцирования в следующую таблицу.

Таблица производных

1. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'_x$.
2. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'_x$.
3. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'_x$.
4. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'_x$.
5. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'_x$.
6. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x$.
7. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x$.
8. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x$.
9. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x$.
10. $(\log_a u)' = \frac{\log_a e}{u} \cdot u'_x$.
11. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'_x$.
12. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'_x$.
13. $(e^u)' = e^u \cdot u'_x$.

Здесь $u = f(x)$ — дифференцируемая функция.

Упражнения

Найти производные следующих функций:

1. $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$.

Отв. $y' = 5x^4 - 12x^2 + 2$.

2. $y = ax^2 + bx + c$.

Отв. $y' = 2ax + b$.

3. $y = at^m + bt^{m+n}$.

Отв. $y' = mat^{m-1} + b(m+n)t^{m+n-1}$.

4. $y = \frac{\pi}{x} + \ln 2$.

Отв. $y' = -\pi/x^2$.

5. $y = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-3}$.

Отв. $y' = 2x^{-\frac{1}{3}} - 5x^{\frac{3}{2}} - 3x^{-4}$.

6. $y = \frac{2x+3}{x^2-5x+5}$.

Отв. $y' = \frac{-2x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2}$.

7. $y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$.

Отв. $y' = \frac{2}{x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)$.

8. $y = x - \operatorname{tg} x$.

Отв. $y' = -\operatorname{tg}^2 x$.

9. $y = x^2 \cos x$.

Отв. $y' = x(2\cos x - x\sin x)$.

10. $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$.

Отв. $y' = \frac{4x - \sin 2x}{4x\sqrt{x}\cos^2 x}$.

11. $y = \frac{\cos x}{1-\sin x}$.

Отв. $y' = \frac{1}{1-\sin x}$.

12. $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$.

Отв. $y' = 0$.

13. $y = x \arcsin x$.

Отв. $y' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

14. $y = \frac{(1+x^2)\operatorname{arctg} x - x}{2}$.

Отв. $y' = x \operatorname{arctg} x$.

15. $y = (x-1)e^x$.

Отв. $y' = xe^x$.

16. $y = (x^2-2x+2)e^x$.

Отв. $y' = x^2 e^x$.

17. $y = \frac{x^2}{\ln x}$.

Отв. $y' = \frac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x}$.

18. $y = \frac{1}{x} + 2\ln x - \frac{\ln x}{x}$.

Отв. $y' = \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x^2} - \frac{2}{x^2}$.

19. $y = \ln x \lg x - \ln a \log_a x$.

Отв. $y' = \frac{2\ln x}{x \ln 10} - \frac{1}{x}$.

20. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Отв. $y' = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

21. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Отв. $y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

22. $y = x^2 2^x$.

Отв. $y' = (2x + x^2 \ln 2)2^x$.

23. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$.

Отв. $y' = -\frac{x}{1+x}$.

24. $y = \sqrt[3]{(4+3x)^2}$.

Отв. $y' = \frac{2}{\sqrt[3]{4+3x}}$.

25. $y = \sqrt[4]{1+\cos^2 x}$.

Отв. $y' = \frac{-\sin 2x}{4\sqrt[4]{(1+\cos^2 x)^3}}$.

26. $y = \sin\sqrt{x}$.

Отв. $y' = \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

27. $y = 4^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}}$.

Отв. $y' = 4^{\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}} \ln 4 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

28. $y = \operatorname{tg}^4(x^2+1)$.

Отв. $y' = \frac{8x\operatorname{tg}^3(x^2+1)}{\cos^2(x^2+1)}$.

29. $y = \operatorname{tg}^3 2x \cdot \cos^2 2x$.

Отв. $y' = 2\operatorname{tg}^2 2x(3 - 2\sin^2 2x)$.

30. $y = \arcsin(e^{x^2})$.

Отв. $y' = \frac{2xe^{x^2}}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}$.

31. $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

Отв. $y'=\dfrac{1+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$.

32. $y=\ln\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}$.

Отв. $y'=-\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}}$.

33. $y=\ln\sin\dfrac{2x+4}{x+1}$.

Отв. $y'=-\dfrac{2}{(x+1)^2}\operatorname{ctg}\dfrac{2x+4}{x+1}$.

34. $y=\dfrac{e^{\sin^2 x}}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$.

Отв. $y'=$
$=\dfrac{e^{\sin^2 x}\,[4\,(1+\operatorname{tg} x)\sin x\cos^2 x-1]}{2\,(1+\operatorname{tg} x)^{3/2}\cos^2 x}$.

35. $y=\sqrt{\dfrac{1-\cos 4x}{1+\cos 4x}}$.

Отв. $y'=\dfrac{2}{\cos^2 2x}$.

36. $y=\ln\dfrac{\sqrt[4]{x^2+3x+1}}{\sqrt[3]{x^2+4}}$.

Отв. $y'=\dfrac{2x+3}{4\,(x^2+3x+1)}-\dfrac{2x}{3\,(x^2+4)}$.

37. $y=x^6\,(x^2+1)^{10}\,(x^3+1)^5$.

Отв. $y'=x^6\,(x^2+1)^{10}\,(x^3+1)^5\left(\dfrac{6}{x}+\right.$
$\left.+\dfrac{20x}{x^2+1}+\dfrac{15x^2}{x^3+1}\right)$.

38. $y=e^{x^2}\operatorname{tg}^3 x\arcsin x$.

Отв. $y'=e^{x^2}\operatorname{tg}^3 x\arcsin x\left(2x+\right.$
$\left.+\dfrac{3}{\sin x\cos x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\right)$.

39. $y=\ln\dfrac{\sqrt{5}+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{\sqrt{5}-\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}$.

Отв. $y'=\dfrac{\sqrt{5}}{2+3\cos x}$.

40. $y=\ln\dfrac{x^3-9}{x^3-1}$.

Отв. $y'=\dfrac{24x^2}{(x^3-9)\,(x^3-1)}$.

41. $y=\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}$.

Отв. $y'=\dfrac{23}{24\sqrt[24]{x}}$.

§ 5. ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ. ПРОИЗВОДНЫЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Функция вида

$$y=[f(x)]^{\varphi(x)},\quad f(x)>0,$$

у которой основание и показатель являются переменными величинами, зависящими от аргумента x, называется *степенно-показательной*. Очевидно, что степенно-показательную функцию нельзя дифференцировать ни по формуле производной степенной функции, ни по формуле производной показательной функции (так как она не является ни той, ни другой). Выведем специальную формулу. Найдем производную данной функции y'_x, предварительно прологарифмировав равенство

$$y=[f(x)]^{\varphi(x)}.$$

Получим

$$\ln y=\varphi(x)\ln f(x).$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, продифференцируем обе части последнего равенства:

$$\frac{1}{y}y'_x=\varphi'(x)\ln f(x)+\varphi(x)\frac{1}{f(x)}f'(x).$$

Отсюда следует, что

$$y'_x = y\left[\varphi'(x)\ln f(x) + \frac{\varphi(x)}{f(x)} f'(x)\right].$$

Заменяя y его значением, получим

$$y'_x = [f(x)]^{\varphi(x)}\left[\varphi'(x)\ln f(x) + \frac{\varphi(x)}{f(x)} f'(x)\right].$$

Операция, состоящая в последовательном применении к функции y сначала логарифмирования (по основанию e), а затем дифференцирования, называется *логарифмическим дифференцированием.*

Результат логарифмического дифференцирования

$$(\ln y)' = \frac{y'_x}{y}$$

называется *логарифмической производной* от функции y.

Пример 1. Найти производную функции $y = x^x$.

Решение. Логарифмируя по основанию e заданную функцию, находим

$$\ln y = x \ln x.$$

Дифференцируя это равенство по x, получаем

$$\frac{y'}{y} = x' \ln x + x (\ln x)' = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1,$$

откуда

$$y' = y(\ln x + 1).$$

Подставляя вместо y выражение x^x, находим

$$y' = x^x (\ln x + 1).$$

Логарифмическое дифференцирование применяют и в тех случаях, когда данная функция является произведением нескольких функций или показательной функцией со сложным показателем.

Пример 2. Найти производную от функции $y = \dfrac{x^3 (x^2+1)^4}{\sqrt{x(x-1)}}$.

Решение. Прологарифмируем по основанию e обе части исходного равенства:

$$\ln y = 3 \ln x + 4 \ln (x^2+1) - \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} \ln (x-1) =$$

$$= \frac{5}{2} \ln x - \frac{1}{2} \ln (x-1) + 4 \ln (x^2+1).$$

Дифференцируя полученное соотношение, имеем

$$\frac{y'}{y} = \frac{5}{2x} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{8x}{x^2+1},$$

откуда

$$y' = y\left[\frac{5}{2x} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{8x}{x^2+1}\right].$$

Подставляя вместо y выражение $\frac{x^3(x^2+1)^4}{\sqrt{x(x-1)}}$, находим

$$y' = \frac{x^3(x^2+1)^4}{\sqrt{x(x-1)}}\left[\frac{5}{2x} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{8x}{x^2+1}\right].$$

Если функция $y=f(x)$ задана неявно, т. е. с помощью некоторого уравнения, связывающего переменные x и y, то для отыскания производной y' нет необходимости решать данное уравнение относительно y. Можно найти производную от этой функции дифференцированием по x обеих частей уравнения, учитывая при этом, что y есть функция от x.

Пример 3. Найти производную от функции

$$x^3y^2 + 5xy + 4 = 0.$$

Решение. Дифференцируем данное соотношение, рассматривая y как функцию x:

$$3x^2y^2 + 2x^3yy' + 5y + 5xy' = 0.$$

Полученное уравнение решаем относительно y':

$$y' = -\frac{3x^2y^2+5y}{2x^3y+5x}.$$

Пример 4. Найти производную функции $y^n - \frac{x+y}{x-y} = 0$.

Решение. Дифференцируем данное соотношение, рассматривая y как функцию от x:

$$ny^{n-1}y' - \frac{(1-y')(x-y)-(1-y')(x+y)}{(x-y)^2} = 0.$$

Умножая обе части равенства на $(x-y)^2$ и раскрывая скобки в числителе дроби, получим

$$ny^{n-1}y'(x-y)^2 - x - xy' + y + yy' + x - xy' + y + yy' = 0.$$

Группируя и приводя подобные члены, имеем

$$y'[ny^{n-1}(x-y)^2 - 2x] = -2y,$$

откуда

$$y' = -\frac{2y}{ny^{n-1}(x-y)^2 - 2x}.$$

Умножим числитель и знаменатель последнего выражения на y:

$$y' = -\frac{2y^2}{ny^n(x-y)^2 - 2xy}.$$

По условию задачи имеем

$$y^n = \frac{x+y}{x-y}.$$

Следовательно, подставив в последнее выражение для y' значение $\frac{x+y}{x-y}$ вместо y^n, получим

$$y' = -\frac{2y^2}{n\frac{x+y}{x-y}(x-y)^2 - 2xy} = -\frac{2y^2}{n(x^2-y^2) - 2xy}.$$

Таким образом, всякую неявную функцию, заданную уравнением, составленным из элементарных функций, можно продифференцировать по известным правилам независимо от того, может ли быть эта функция представлена в явном виде или нет. Производная такой неявной функции выражается через независимую переменную и саму функцию.

Упражнения

Найти производные следующих функций:

1. $y=x^{\sin x}$.

Отв. $y'=x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\ln x\right)$.

2. $y=(\cos x)^{\operatorname{arctg} x}$.

Отв. $y'=$
$=(\cos x)^{\operatorname{arctg} x}\left(\frac{\ln\cos x}{1+x^2}-\operatorname{tg} x\operatorname{arctg} x\right)$.

3. $y=(x^2+3)^{\sqrt{x}}$.

Отв. $y'=$
$=(x^2+3)^{\sqrt{x}}\left[\frac{2x\sqrt{x}}{x^2+3}+\frac{\ln(x^2+3)}{2\sqrt{x}}\right]$.

4. $y=(1-x^2)^{\arccos x}$.

Отв. $y'=-(1-x^2)^{\arccos x}\times$
$\times\left[\frac{2x\arccos x}{1-x^2}+\frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\right]$.

5. $y=\sqrt[x]{\operatorname{arcctg} x}$.

Отв. $y'=-\sqrt[x]{\operatorname{arcctg} x}\times$
$\times\left[\frac{1}{x(1+x^2)\operatorname{arcctg} x}+\frac{\ln\operatorname{arcctg} x}{x^2}\right]$.

Найти производные следующих неявных функций:

1. $x^3y-3x^2y^2+5y^3-3x+4=0$.

Отв. $y'=\frac{-3x^2y+6xy^2+3}{x^3-6x^2y+15y^2}$.

2. $x^2y+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=0$.

Отв. $y'=\frac{-2x^3y-2xy^3+y}{x^4+x^2y^2+x}$.

3. $x^3+y^3-a=0$.

Отв. $y'=-\frac{x^2}{y^2}$.

4. $x^n-\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=0$.

Отв. $y'=\frac{n(x^4-y^4)+4x^2y^2}{4x^3y}$.

5. $y^5-5axy+x^5=0$.

Отв. $y'=\frac{ay-x^4}{y^4-ax}$.

6. $a^x-e^{x-y}=0$.

Отв. $y'=1-\ln a$.

7. $e^y=x^{x+y}$.

Отв. $y'=\frac{x(\ln x+1)+y}{x(1-\ln x)}$.

§ 6. ПРОИЗВОДНЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

Иногда зависимость функции y от аргумента x задается посредством третьей вспомогательной переменной. Так, например, зададим две функции одной и той же переменной t:

$$\left.\begin{aligned}x&=\varphi(t),\\ y&=\psi(t),\end{aligned}\right\}$$

где t изменяется в пределах $t_0<t<T$.

Задание этих функций означает задание функциональной зависимости между переменными x и y, так как при изменении третьей переменной t от t_0 до T будут соответственно изменяться переменные x и y. При этом точка с координатами $(x; y)$ опишет некоторую кривую на плоскости. Задание функциональной зависимости между двумя переменными, состоящее в том, что обе переменные определяются в отдельности как функции одной и той же вспомогательной переменной, называется *параметрическим*, а вспомогательная переменная — *параметром*. В данном примере параметром является переменная t. Иногда от параметрического задания функции можно перейти к явному заданию, т. е. указать непосредственную функциональную зависимость между x и y. Такой переход называется *исключением параметра*. Это осуществляется в том случае, когда одно из уравнений

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\}$$

разрешимо относительно параметра t. Тогда, подставляя найденное значение t в другое уравнение, приходим к выражению вида $y = f(x)$ или $x = g(y)$. Параметрическое задание функций имеет ряд преимуществ по сравнению с другими формами их задания. В то время как непосредственная связь между x и y может быть сложной, в частности, представляться многозначным выражением, функции, определяющие x и y через параметр t, могут оказаться однозначными и простыми. Кроме того, при параметрическом задании функции заранее не предусматривается, какая именно из переменных принимается за независимую переменную, а какая — за функцию. Параметрически заданные функции особенно часто используются в механике при задании траектории движения. Примером параметрического задания функциональной зависимости является параметрическое уравнение окружности

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= a\sin t, \end{aligned}\right\}$$

где a — радиус окружности, а параметр t — дуга окружности (в радианах). Для исключения параметра t возведем в квадрат оба уравнения и сложим их почленно. В результате получим $x^2 + y^2 = a^2$. Здесь y как функция x (или x как функция y) двузначна, в то время как параметрическое задание той же зависимости устанавливается с помощью однозначных функций.

Однако, указанное выше исключение параметра не всегда возможно. Поэтому рассмотрим способ дифференцирования функции y по x, при котором не требуется знать явное задание этой функции. Пусть y как функция от x задана параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\}$$

причем функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы в промежутке $[t_0, T]$ и $\varphi'(t) \neq 0$. Придадим переменной t приращение Δt. Тогда переменная x получит приращение $\Delta x = \varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)$, а переменная y — приращение $\Delta y = \psi(t+\Delta t) - \psi(t)$. В силу непрерывности дифференцируемых функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ при $\Delta t \to 0$ имеем $\Delta y \to 0$ и $\Delta x \to 0$.

Рассмотрим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\psi(t+\Delta t) - \psi(t)}{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}.$$

Разделим числитель и знаменатель на $\Delta t \neq 0$. Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ и учитывая, что при $\Delta t \to 0$ также и $\Delta x \to 0$, получим

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

т. е.

$$y' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \tag{8.14}$$

или, в более компактном виде,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{8.15}$$

Таким образом, производная функции, заданной параметрически, равна отношению производной $y'_t = \psi'(t)$ к производной $x'_t = \varphi'(t)$.

Пример 1. Исключить параметр t из уравнений

$$\left.\begin{aligned} x &= 8t^2 - 7, \\ y &= 16t^2 + 4 \end{aligned}\right\}$$

и определить вид линии, определяемой полученным уравнением.

Решение. Из первого уравнения определим t^2 в зависимости от x:

$$t^2 = \frac{x+7}{8}.$$

Подставим это значение во второе из уравнений, тогда

$$y = 16\,\frac{x+7}{8} + 4 = 2x + 18.$$

Линия, определяемая этим уравнением, есть прямая. Следовательно, заданные уравнения определяют прямую линию.

Пример 2. Найти производную функции, заданной параметрически:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a \sin t}{1 + b \cos t}, \\ y &= \frac{c \cos t}{1 + b \cos t}. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Находим x'_t и y'_t:

$$x'_t = a\frac{\cos t\,(1+b\cos t)-(-b\sin t)\sin t}{(1+b\cos t)^2} = a\frac{\cos t + b\cos^2 t + b\sin^2 t}{(1+b\cos t)^2} =$$
$$= a\frac{\cos t + b(\cos^2 t+\sin^2 t)}{(1+b\cos t)^2} = \frac{a(\cos t+b)}{(1+b\cos t)^2};$$
$$y'_t = c\frac{-\sin t\,(1+b\cos t)-(-b\sin t)\cos t}{(1+b\cos t)^2} =$$
$$= c\frac{-\sin t - b\sin t\cos t + b\sin t\cos t}{(1+b\cos t)^2} = -\frac{c\sin t}{(1+b\cos t)^2}.$$

Подставляя полученные значения x'_t и y'_t в формулу (8.15), получим

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{-c\sin t\,(1+b\cos t)^2}{(1+b\cos t)^2\,a\,(\cos t+b)} = \frac{c\sin t}{a\,(\cos t+b)}.$$

Упражнения

1. Определить вид линии, описываемой уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= 2t-4t^2,\\ y &= t-2t^2. \end{aligned}\right\}$$

Отв. Прямая линия.

2. Исключить параметр t $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ из уравнений

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t,\\ y &= b\sin t. \end{aligned}\right\}$$

Отв. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

Найти производные следующих функций, заданных параметрически:

1. $\left.\begin{aligned} x &= \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}},\\ y &= \arccos\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y'=1.$

2. $\left.\begin{aligned} x &= 2\cos t-\cos 2t,\\ y &= 2\sin t-\sin 2t. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y'=\operatorname{tg}\dfrac{3t}{2}.$

3. $\left.\begin{aligned} x &= a\cos t,\\ y &= b\sin t. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y'=-\dfrac{b}{a}\operatorname{ctg} t.$

4. $\left.\begin{aligned} x &= a(t-\sin t),\\ y &= a(1-\cos t). \end{aligned}\right\}$

Отв. $y'=\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}.$

5. $\left.\begin{aligned} x &= \dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}},\\ y &= \dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y'=-\operatorname{tg} 3t.$

6. $\left.\begin{aligned} x &= a\cos^3 t,\\ y &= a\sin^3 t. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y'=-\operatorname{tg} t.$

7. $\left.\begin{aligned} x &= \dfrac{3a-2t}{at},\\ y &= \dfrac{(a-t)^3}{a^2t^2}. \end{aligned}\right\}$

Отв. $y'=\dfrac{4(a-t)^2(2a+t)}{3a^2t}.$

§ 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

С понятием производной связано другое важнейшее понятие математического анализа — *дифференциал* функции.

Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна в точке $x=x_0$, а также в некоторой окрестности этой точки. Дадим значению ар-

гумента x_0 приращение Δx. Тогда функция получает приращение

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

В силу непрерывности функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ при $\Delta x \to 0$ также $\Delta y \to 0$, т. е. приращение Δy, как и приращение Δx, будут бесконечно малыми величинами.

Если, в частности, функция $y = f(x)$ линейная, т. е. $y = ax + b$, то ее приращение

$$\Delta y = a(x + \Delta x) + b - ax - b = a\Delta x.$$

Таким образом, зависимость Δy от Δx в этом случае также оказывается линейной. Иными словами, приращение линейной функции пропорционально приращению аргумента.

Однако это свойство присуще только линейной функции. Пусть $y = f(x)$ — произвольная функция, непрерывная при рассматриваемых значениях x и имеющая производную

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

В соответствии с теоремой, доказанной в § 3 гл. VII, из этого равенства следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \beta,$$

где β — бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$. Отсюда находим, что

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha,$$

где $\alpha = \beta \Delta x$. Величина α есть бесконечно малая более высокого порядка малости, нежели Δx. Действительно (см. § 8 гл. VII),

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\beta \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \beta = 0.$$

Таким образом, пренебрегая бесконечно малой α, имеем

$$\Delta y \approx a\Delta x,$$

где $a = f'(x)$.

Итак, если функция $y = f(x)$ не является линейной, то при условии, что она имеет производную, все же существует такой коэффициент пропорциональности $f'(x)$, что величина $f'(x)\,\Delta x$ хотя и не равна точно приращению Δy, но отличается от него на величину бесконечно малую более высокого порядка малости, нежели Δx. В этом случае бесконечно малая $f'(x)\,\Delta x$ эквивалентна бесконечно малой Δy или, иначе говоря, $f'(x)\,\Delta x$ является главной частью приращения Δy. Главная часть приращения Δy функции $y = f(x)$, пропорциональная приращению аргумента Δx и отличающаяся от соответствующего приращения Δy функции на величину бесконечно малую более высокого порядка малости по сравнению с Δx, называется *дифференциалом функции*. Символически диффе-

ренциал функции $y=f(x)$ обозначается так: dy или $df(x)$. Согласно определению дифференциал функции

$$dy=f'(x)\,\Delta x, \text{ или } df(x)=f'(x)\,\Delta x.$$

Рассмотрим функцию $y=x$. Ее дифференциал

$$dy=dx=(x)'\,\Delta x=\Delta x,$$

т. е. $dx=\Delta x$. Следовательно, приращение Δx независимой переменной x называется ее дифференциалом dx. Тогда дифференциал функции $y=f(x)$ принимает вид

$$dy=f'(x)\,dx,$$

или

$$df(x)=f'(x)\,dx.$$

Итак, дифференциал функции равен ее производной, умноженной на дифференциал независимой переменной. Для производной имеем выражение

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}.$$

Таким образом, зная производную, легко найти дифференциал и обратно. Поэтому действие нахождения производной и дифференциала данной функции носят общее название — *дифференцирование*. В общем случае дифференциал функции $dy=f'(x)\,dx$ является функцией двух независимых друг от друга переменных x и dx.

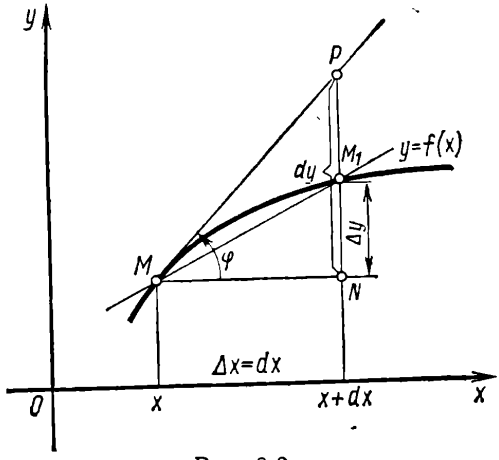

Рис. 8.3

Выясним геометрический смысл дифференциала. Построим график дифференцируемой функции $y=f(x)$ и возьмем на нем точки M и M_1, соответствующие значениям аргумента x и $x+dx$ (рис. 8.3). Проведем секущую MM_1 и касательную к точке M данной кривой. Проведем также горизонтальную прямую MN. Из треугольника MNM_1 имеем

$$MN=\Delta x=dx,$$
$$NM_1=\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

Продолжим прямую NM_1 до пересечения с касательной в точке P. В треугольнике MNP угол φ равен углу наклона касательной MP к оси Ox. Следовательно, $\operatorname{tg}\varphi=f'(x)$. Тогда величина катета

$$NP=MN\operatorname{tg}\varphi=dx\cdot\operatorname{tg}\varphi=dx\,f'(x),$$

или

$$NP=f'(x)\,dx.$$

Правая часть последнего равенства есть дифференциал функции $y=f(x)$. Следовательно, дифференциал dy функции $y=f(x)$ в точке x изображается приращением ординаты касательной, проведенной к линии $y=f(x)$ в точке $[x, f(x)]$. Дифференциал функции dy в данной точке может быть как больше приращения Δy (рис. 8.3), так и меньше его. Механический смысл дифференциала функции заключается в том, что приращение пути

$$\Delta s=f(t+\Delta t)-f(t)$$

на рис. 8.3 представляет ордината NM_1, а дифференциал пути

$$ds=vdt$$

—ордината NP. Таким образом, дифференциал пути равен тому приращению пути, которое получится, если предположить, что, начиная с данного момента времени t, точка движется равномерно по касательной, сохраняя приобретенную скорость v.

Теорема. *Для существования дифференциала функции $f(x)$ в точке x необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная производная $f'(x)$ в этой точке.*

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна в точке x и ее окрестности, а также имеет дифференциал в этой точке. По определению это означает, что выполняется равенство

$$\Delta y=a\Delta x+\beta\Delta x,$$

где $\beta\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Разделим последнее равенство на Δx, тогда, переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(a+\beta).$$

Так как в правой части равенства находится предел суммы постоянной a и бесконечно малой β, то согласно обратной теореме, доказанной в § 3 гл. VII, имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=a.$$

Предел, находящийся в левой части этого равенства, по определению равен производной $f'(x)$. Таким образом, функция $y=f(x)$ имеет в точке x конечную производную, равную a.

Достаточность. Пусть функция $y=f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в точке x. Согласно определению производной

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Это значит (согласно теореме, доказанной в § 3 гл. VII), что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\beta,$$

где β — бесконечно малая величина. Умножая обе части равенства на Δx, получим

$$\Delta y = (f'(x) + \beta)\Delta x,$$

где $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$, а величина $\beta \Delta x$ является бесконечно малой более высокого порядка малости по сравнению с Δx. Это означает, что слагаемое $f'(x)\,\Delta x$ есть главная часть приращения функции, т. е. дифференциал.

Таким образом, существование производной является условием существования дифференциала, или условием дифференцируемости функции.

§ 8. ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

Дифференциал функции отличается от производной множителем dx, поэтому все правила вычисления производной используются и для вычисления дифференциала.

В соответствии с правилами нахождения производных результатов арифметических действий и принятыми обозначениями получим аналогичные правила для нахождения дифференциалов.

Так как

$$(u \pm v \pm \ldots \pm w)' = u' \pm v' \pm \ldots \pm w',$$

то, умножая обе части равенства на dx, получим

$$d(u \pm v \pm \ldots \pm w) = (u \pm v \pm \ldots \pm w)'\,dx = \\ = u'dx \pm v'dx \pm \ldots \pm w'dx = du \pm dv \pm \ldots \pm dw,$$

т. е.

$$d(u \pm v \pm \ldots \pm w) = du \pm dv \pm \ldots \pm dw.$$

Так как

$$(uv)' = u'v + v'u,$$

то, умножая обе части равенства на dx, получим

$$d(uv) = (uv)'\,dx = u'\,dx \cdot v + v'\,dx \cdot u = du \cdot v + dv \cdot u,$$

т. е.

$$d(uv) = v\,du + u\,dv.$$

В частности,

$$d(cu) = c\,du.$$

Так как

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

то, умножая обе части равенства на dx, получим

$$d\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(\frac{u}{v}\right)'dx = \frac{u'dx \cdot v - u \cdot v'\,dx}{v^2} = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2},$$

т. е.

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Рассмотрим правило дифференцирования сложной функции. Пусть дана функция $y=f(x)$, где $x=\varphi(z)$, причем каждая из функций $f(x)$ и $\varphi(z)$ имеет производные. Очевидно, y является сложной функцией аргумента z:

$$y=f[\varphi(z)]=F(z).$$

Дифференциал сложной функции y равен

$$dy=F'(z)\,dz.$$

Согласно результатам, полученным в § 3, имеем

$$F'(z)=f'(x)\,\varphi'(z),$$

следовательно,

$$dy=f'(x)\cdot\varphi'(z)\,dz.$$

Объединяя два последних множителя, получим

$$\varphi'(z)\,dz=dx.$$

Подставляя этот результат в последнее равенство, имеем

$$dy=f'(x)\,dx.$$

Таким образом, форма дифференциала одинакова, независимо от того, является ли аргумент x независимой переменной или функцией от независимой переменной. Это свойство сохранения формы дифференциала называется *инвариантностью формы дифференциала.* Производная в отличие от дифференциала свойством инвариантности не обладает. Зная производные основных элементарных функций, можно составить следующую таблицу дифференциалов этих функций.

Таблица дифференциалов

1. $d(u^n)=nu^{n-1}\,du.$
2. $d(\sin u)=\cos u\,du.$
3. $d(\cos u)=-\sin u\,du.$
4. $d(\operatorname{tg} u)=\dfrac{du}{\cos^2 u}.$
5. $d(\operatorname{ctg} u)=-\dfrac{du}{\sin^2 u}.$
6. $d(\arcsin u)=\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$
7. $d(\arccos u)=-\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$
8. $d(\operatorname{arctg} u)=\dfrac{du}{1+u^2}.$
9. $(\operatorname{arcctg} u)=-\dfrac{du}{1+u^2}.$
10. $d(\log_a u)=\dfrac{\log_a e}{u}\,du.$
11. $d(\ln u)=\dfrac{du}{u}.$
12. $d(a^u)=a^u\ln a\,du.$
13. $d(e^u)=e^u\,du.$

Здесь $u=f(x)$ — дифференцируемая функция.

Пример 1. Найти дифференциал функции $y=(1+\operatorname{tg} x)^8$.

Решение. Используя таблицу дифференциалов и применяя правило нахождения дифференциала сложной функции, получим

$$dy = 8(1+\operatorname{tg} x)^7 d(1+\operatorname{tg} x) = 8(1+\operatorname{tg} x)^7 \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Пример 2. Найти дифференциал функции $y = \ln \operatorname{arctg}(\sin x)$.

Решение. Используя таблицу дифференциалов и применяя правило нахождения дифференциала сложной функции, находим

$$dy = \frac{d[\operatorname{arctg}(\sin x)]}{\operatorname{arctg}(\sin x)} = \frac{\frac{1}{1+\sin^2 x} d(\sin x)}{\operatorname{arctg}(\sin x)} = \frac{\cos x\, dx}{(1+\sin^2 x)\operatorname{arctg}(\sin x)}.$$

Дифференциал как главная часть приращения функции позволяет с большей степенью точности вычислять приближенно приращение любой дифференцируемой функции. При этом получить выражение дифференциала несравненно проще, нежели выражение точного приращения функции. Применение дифференциала для приближенного вычисления значений функции основано на замене иногда очень сложного приращения функции

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

весьма простым выражением $f'(x_0)\,dx$. Итак, для малых dx получаем, что

$$\Delta y = f(x_0 + dx) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,dx = dy,$$

т. е. данная функция $y = f(x)$ заменяется линейной функцией $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, для которой ее собственное значение и значение ее производной при $x = x_0$ соответственно равны $f(x_0)$ и $f'(x_0)$. Такая замена, вообще говоря, только в достаточно малой окрестности точки x_0 приводит к ошибкам, которыми можно пренебречь в изучаемом процессе (хотя и нельзя оценить возникающую при этом погрешность).

Пример 3. Найти приближенное значение $\sqrt[3]{26{,}19}$.

Решение. В данном случае

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Полагая $x = 27$, $\Delta x = -0{,}81$ и применяя формулу

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x,$$

получим

$$\sqrt[3]{26{,}19} = \sqrt[3]{27 - 0{,}81} \approx \sqrt[3]{27} - \frac{0{,}81}{3\sqrt[3]{27^2}} = 3 - \frac{0{,}81}{3 \cdot 9},$$

или, окончательно,

$$\sqrt[3]{26{,}19} \approx 3 - 0{,}03 = 2{,}97.$$

Пример 4. Найти приближенное значение $(1{,}03)^5$.

Решение. В данном случае $f(x)=x^5$. Тогда

$$\Delta y=(x+\Delta x)^5-x^5;\quad dy=5x^4\,\Delta x.$$

Так как с точностью до бесконечно малой высшего порядка имеет место приближенное равенство $\Delta y\approx dy$, то

$$(x+\Delta x)^5-x^5\approx 5x^4\Delta x,\quad \text{а}\quad (x+\Delta x)^5\approx x^5+5x^4\,\Delta x.$$

Здесь $x=1$, $\Delta x=0{,}03$, следовательно,

$$(1{,}03)^5\approx 1^5+5\cdot 1^4\cdot 0{,}03\approx 1{,}15.$$

Пример 5. Найти приближенное значение $\sin 31°$.
Решение. В данном случае $f(x)=\sin x$. Тогда

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x;\quad dy=\cos x\,\Delta x.$$

Имеет место приближенное равенство $\Delta y\approx dy$, поэтому

$$\sin(x+\Delta x)-\sin x\approx\cos x\,\Delta x,$$

или

$$\sin(x+\Delta x)\approx\sin x+\cos x\,\Delta x.$$

Здесь $x=30°$, $\Delta x=1°=\frac{\pi}{180}$, следовательно,

$$\sin 31°\approx\sin 30°+\cos 30°\,\frac{\pi}{180}=0{,}5+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0{,}01745,$$

или, окончательно,

$$\sin 31°\approx 0{,}5151.$$

Пример 6. Найти приближенное значение $\ln 1{,}007$.
Решение. В данном случае $f(x)=\ln x$. Тогда

$$\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right);\quad dy=\frac{\Delta x}{x}.$$

Так как имеет место приближенное равенство $\Delta y\approx dy$, то

$$\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\approx\frac{\Delta x}{x}.$$

Здесь $x=1$, $\Delta x=0{,}007$, следовательно,

$$\ln 1{,}007=\ln(1+0{,}007)\approx\frac{0{,}007}{1}=0{,}007.$$

Упражнения

Найти дифференциалы следующих функций:

1. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.
Отв. $dy=\frac{dx}{1+x^2}$.
2. $y=(\arcsin x)^5$.
Отв. $dy=\frac{5(\arcsin x)^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. $y=\sqrt{1+\sin^2 x}$
Отв. $dy=\frac{\sin x\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.
4. $y=\cos^2\sqrt{x}$
Отв. $dy=-2\cos\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,\frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

5. $y=\dfrac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Отв. $dy=\dfrac{1-x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,dx$.

6. $y=\sqrt[3]{(2+\cos x)^2}$.

Отв. $dy=-\dfrac{2\sin x\,dx}{3\sqrt[3]{2+\cos x}}$.

7. $y=\arccos(2^x)$.

Отв. $dy=-\dfrac{2^x\ln 2\,dx}{\sqrt{1-2^{2x}}}$.

8. $y=(1+x^2)\operatorname{arcctg} x$.

Отв. $dy=(2x\operatorname{arcctg} x-1)\,dx$.

9. Найти приближенное значение $\sqrt[4]{16{,}64}$.

Отв. 2,02.

10. Найти приближенное значение $\sqrt{8{,}76}$.

Отв. 2,96.

11. Найти приближенное значение $\ln 0{,}9$.

Отв. $-0{,}1$.

12. Найти приближенное значение $\ln 1{,}008$.

Отв. 0,008.

13. Найти приближенное значение $\sin 29°$.

Отв. 0,485.

§ 9. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть производная $f'(x)$ функции $y=f(x)$ является в свою очередь непрерывной и дифференцируемой функцией в некотором промежутке. Тогда можно ввести понятие *производной второго порядка* $f''(x)$ *(второй производной)* от первоначальной функции $f(x)$ или производной от производной $f'(x)$, т. е.

$$f''(x)=[f'(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}.$$

Если вторая производная также дифференцируема, то производную от второй производной называют *производной третьего порядка* и обозначают $f'''(x)$ и т. д.

Производной n-го порядка $f^{(n)}(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка:

$$f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}.$$

Пример 1. Найти $y^{(m)}$ от функции $y=x^n$.

Решение. Дифференцируя последовательно m раз данную функцию, находим

$$y'=nx^{n-1};\ y''=n(n-1)x^{n-2};\ y'''=n(n-1)(n-2)x^{n-3};\ \ldots;$$
$$y^{(m)}=n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)x^{n-m}.$$

Если порядок m-й производной больше показателя степени n, то m-я производная степени обращается в нуль, так как при $m=n$ имеем

$$y^{(n)}=n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1=n!\quad(\text{const}),$$

а производные $(n+1)$-го и высших порядков обращаются в нуль как производные от постоянной величины.

Пример 2. Найти $y^{(n)}$ от функции $y=e^x$.

Решение. Дифференцируя последовательно n раз заданную функцию, находим

$$y'=e^x;\ y''=e^x;\ y'''=e^x;\ \ldots;\ y^{(n)}=(e^x)^{(n)}=e^x.$$

Пример 3. Найти $y^{(n)}$ от функции $y=a^x$.

Решение. Дифференцируя последовательно n раз заданную функцию, находим

$$y'=a^x\ln a;\ y''=a^x(\ln a)^2;\ y'''=a^x(\ln a)^3;\ \ldots;$$
$$y^{(n)}=(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n.$$

Пример 4. Найти $y^{(n)}$ от функции $y=\ln x$.

Решение. Дифференцируя последовательно n раз заданную функцию, находим

$$y'=\frac{1}{x};\ y''=\frac{-1}{x^2};\ y'''=\frac{(-1)(-2)}{x^3};\ \ldots;$$

$$y^{(n)}=\frac{(-1)(-2)\cdot\ldots\cdot(-n+1)}{x^n},\ \text{или}\ y^{(n)}=(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

Пример 5. Найти $y^{(n)}$ от функции $y=u\pm v\pm\ldots\pm w$, где $u=u(x)$; $v=v(x)$; $\ldots$; $w=w(x)$.

Решение. Дифференцируя последовательно, находим

$$y'=u'\pm v'\pm\ldots\pm w';$$
$$y''=u''\pm v''\pm\ldots\pm w'';$$
$$y'''=u'''\pm v'''\pm\ldots\pm w''';$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}\pm\ldots\pm w^{(n)}.$$

Итак, n-я производная сумма равна сумме n-х производных слагаемых.

Пример 6. Найти $y^{(n)}$ от функции $y=uv$, где $u=u(x)$; $v=v(x)$.

Решение. Последовательно дифференцируя, находим

$$y'=u'v+v'u;$$
$$y''=u''v+u'v'+v''u+v'u'=u''v+2u'v'+v''u.$$
$$y'''=u'''v+u''v'+2u''v'+2u'v''+v'''u+v''u'=$$
$$=u'''v+3u''v'+3u'v''+v'''u.$$

Продолжая процесс дифференцирования, получим правило вычисления n-й производной произведения:

$$y^{(n)}=(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\ldots+nu'v^{(n-1)}+uv^{(n)}.$$

Эта формула может быть получена методом полной математической индукции и называется *формулой Лейбница*.

Пример 7. Найти $y^{(100)}$ от функции $x^2\sin x$.

Решение. Воспользовавшись формулой Лейбница, имеем

$$y^{(100)}=(x^2\sin x)^{(100)}=(\sin x)^{(100)}x^2+100(\sin x)^{(99)}(x^2)'+$$
$$+\frac{100\cdot99}{2}(\sin x)^{(98)}(x^2)''.$$

Последующие слагаемые равны нулю, так как каждое из них содержит множителем производную выше второго порядка от x^2.

Следовательно,

$$y^{(100)} = x^2 \sin\left(x + 100 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 200\, x \sin\left(x + 99 \cdot \frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ 9900 \sin\left(x + 98 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = x^2 \sin x - 200\, x \cos x - 9900 \sin x.$$

Если y—неявная функция, то для нахождения ее производной высшего порядка необходимо соответствующее число раз продифференцировать заданное уравнение, связывающее x и y, учитывая при этом, что y и все ее производные суть функции независимой переменной.

Пример 8. Найти y'' от функции $\operatorname{arctg} y - y + x = 0$.

Решение. Дифференцируя заданное уравнение, получаем

$$\frac{y'}{1+y^2} - y' + 1 = 0, \text{ или } y' - y' - y^2 y' + 1 + y^2 = 0,$$

откуда

$$y' = \frac{1+y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2} + 1.$$

Далее находим

$$y'' = -2y^{-3}y' = -\frac{2}{y^3}\, y'.$$

В правую часть последнего равенства подставляем вместо y' его значение:

$$y'' = -\frac{2}{y^3}\left(\frac{1+y^2}{y^2}\right) = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}.$$

Чтобы найти производную высшего порядка параметрически заданной функции, нужно соответствующее число раз продифференцировать выражения для предыдущей производной как сложную функцию независимой переменной. Пусть

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t). \end{aligned}\right\}$$

Тогда

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Далее имеем

$$y'' = \frac{\psi''(t)\,\varphi'(t) - \psi'(t)\,\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}\, t'_x.$$

Так как

$$t'_x = \frac{1}{\varphi'(t)},$$

то

$$y'' = \frac{\psi''(t)\,\varphi'(t) - \psi'(t)\,\varphi''(t)}{[\varphi'(x)]^3}.$$

Дифференцируя это выражение по x, найдем третью производную и т. д.

Пример 9. Найти y'' от функции, заданной параметрически,

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos^3 t, \\ y &= a\sin^3 t. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Дифференцируя исходные равенства, находим

$$x'_t = -3a\cos^2 t\sin t,$$

$$y'_t = 3a\sin^2 t\cos t,$$

откуда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} = -\operatorname{tg} t.$$

Вторая производная

$$y'' = (-\operatorname{tg} t)'\, t'_x = -\frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{x'_t} = -\frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{-3a\cos^2 t\sin t},$$

или

$$y'' = \frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}.$$

Дифференциал функции $y = f(x)$ является функцией двух переменных x и dx, независимых друг от друга. Рассматривая $df(x)$ как функцию от x, найдем дифференциал $d[df(x)]$. Если этот дифференциал существует, то он называется *дифференциалом второго порядка* (или *вторым дифференциалом*) от функции $f(x)$ и обозначается d^2y, т. е.

$$d^2y = d(dy).$$

Точно так же дифференциал от дифференциала второго порядка называется *дифференциалом третьего порядка* (или *третьим дифференциалом* d^3y) от функции $y = f(x)$.

Дифференциалом n-го порядка d^ny называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка как функции x, т. е.

$$d^ny = d(d^{n-1}y).$$

Найдем дифференциалы высших порядков от функции $f(x)$. Для дифференциала второго порядка имеем

$$d(dy) = (dy)'\,dx = [f'(x)\,dx]'\,dx$$

или (в силу независимости переменных x и dx)

$$d^2y = f''(x)\,dx\,dx = f''(x)\,dx^2.$$

Аналогично, для дифференциала n-го порядка вообще имеем

$$d^ny = (d^{n-1}y)'\,dx = [f^{(n-1)}(x)\,dx^{n-1}]'\,dx = f^{(n)}(x)\,dx^n,$$

где под символом dx^n понимается n-я степень dx. Итак,

$$d^ny = f^{(n)}dx^n,$$

т. е. дифференциал n-го порядка равен произведению производной n-го порядка по независимой переменной на n-ю степень дифференциала независимой переменной. Если x не есть независимая переменная, а функция от нее, то dx зависит от x. Тогда, находя выражение для второго дифференциала, получим

$$d^2y = d[f'(x)\,dx] = d[f'(x)]\,dx + f'(x)\,d(dx).$$

Но

$$d[f'(x)] = f''(x)\,dx \text{ и } d(dx) = d^2x,$$

поэтому

$$d^2y = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x,$$

т. е. появился добавочный член $f'(x)\,d^2x$, который обращается в нуль, если x — независимая переменная:

$$d^2x = (x)''\,dx^2 = 0 \cdot dx^2 = 0.$$

Таким образом, дифференциалы высших порядков не обладают свойством инвариантности формы дифференциала.

Пример 10. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \cos 5x$.

Решение. По формуле $d^2y = f''(x)\,dx^2$ имеем

$$d^2y = [(\cos 5x)']'\,dx^2 = (-5\sin 5x)'\,dx^2 = -25\cos 5x\,dx^2.$$

Упражнения

1. Найти y''', если $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.

Отв. $y''' = 6$.

2. Найти y'', если $y = \arcsin x$.

Отв. $y'' = \dfrac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

3. Найти y'', если $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

Отв. $y'' = \dfrac{4}{(x-1)^3}$.

4. Найти $y^{(IV)}$, если $y = \sqrt{x}$.

Отв. $y^{(IV)} = -\dfrac{15}{16x^3\sqrt{x}}$.

5. Найти $y^{(V)}$, если $y = x^5 + 2x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 1$.

Отв. $y^{(V)} = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

6. Найти y''', если $y = x^2 \sin 2x$.

Отв. $y''' = -4(2x^2\cos 2x + 6x\sin 2x - 3\cos 2x)$.

7. Найти $y^{(IV)}$, если $y = x^4 \ln x$.

Отв. $y^{(IV)} = 24\ln x + 50$.

8. Найти $y^{(n)}$, если $y = \dfrac{1+x}{1-x}$.

Отв. $y^{(n)} = \dfrac{2 \cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$.

9. Точка движется по прямой, причем расстояние s (м) точки от начала отсчета определяется уравнением $s = t^3 - 2t^2 + 4t - 1$, где t — время (с). Определить ускорение движения точки в конце третьей секунды.

Отв. 14 м/с^2.

10. Найти y'', если $xy^3 + 2y - 1 = 0$.

Отв. $y'' = \dfrac{12y^5(xy^2+1)}{(3xy^2+2)^3}$.

11. Найти y'', если $y^2 = 2px$.

Отв. $y'' = -\dfrac{p^2}{y^3}$.

12. Найти y'' от функции $\left.\begin{array}{l} x = \ln t, \\ y = t^3. \end{array}\right\}$.

Отв. $y'' = 9t^3$.

13. Найти y'' от функции $\left.\begin{array}{l} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{array}\right\}$

Отв. $y'' = -\sqrt{1-t^2}$.

14. Найти y'' от функции $\left.\begin{array}{l} x = \cos 2t, \\ y = \sin^2 t. \end{array}\right\}$

Отв. $y'' = 0$.

15. Найти y'' от функции $\left.\begin{array}{l} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \dfrac{1}{2}t^2. \end{array}\right\}$

Отв. $y'' = (1+t^2)(1+3t^2)$.

16. Найти d^2y, если $y=\arccos x$.

Ответ. $d^2y=-\dfrac{x\,dx^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

17. Найти d^2y, если $y=\sin x\ln x$.

Ответ. $d^2y=\left(-\sin\ln x+\dfrac{2\cos x}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}\right)dx^2$.

18. Найти d^3z, если $z=x^2e^{-x}$.

Ответ. $d^3z=-e^{-x}(x^2-6x+6)\,dx^2$.

19. Найти d^4z, если $z=\dfrac{x^4}{2-x}$.

Ответ. $d^4z=\dfrac{384dx^4}{(2-x)^5}$.

20. Найти d^ny, если $y=e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)$.

Ответ. $d^ny=e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha+n\alpha)\,dx^n$.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсцисса 11, 75
Алгебраическая функция 171
Алгебраическое дополнение 90,91
Аналитический способ задания функции 168, 169
Аппликата 75
Аргумент 166
Арккосинус 179
Арккотангенс 181
Арксинус 178, 179
Арктангенс 181
Архимеда спираль 34
Асимптота 185
Асимптоты гиперболы 65,66

Бесконечно большая величина 191
— большой аргумент 184
— малая величина 188
— — —, свойства 190,191
Бесконечный интервал 166
— разрыв 224
Больцано — Коши теоремы 226, 227
Большая ось эллипса 59

Вейерштрасса теорема 226
Вектор 98
Векторная величина 98
Векторное произведение 119
— —, свойства 120, 122
Векторно-скалярное произведение, *см.* Смешанное произведение
Величина отрезка 7, 9
Вершина гиперболического параболоида 161
— конуса 162
— параболы 72
— эллиптического параболоида 160
Вершины гиперболы 64
— эллипса 59
Взаимное расположение двух прямых на плоскости 45, 46
Возрастающая функция 171, 172
Восходящая парабола 73
Вторая производная 261
— — от функции, заданной параметрически 263
Второй замечательный предел 202
Вычитание векторов 109

Геометрический смысл дифференциала 255, 256
— — производной 231
— — смешанного произведения 124
Гипербола 62
Гиперболические функции 208
Гиперболический косинус 208
— параболоид 160
— синус 208
— цилиндр 149
Главная диагональ определителя 80
— часть приращения функции 254
Главное значение полярного угла 15
Главные значения обратных тригонометрических функций 179, 181
— сечения гиперболоида 154
— — эллипсоида 151
Горловой эллипс 154
График функции 32, *см. также* соотв. названия
Графический способ задания функции 167

Двуполостный гиперболоид 155
Двусторонний предел 217
Действительная ось гиперболы 65
Деление отрезка в данном отношении 24, 105
Директриса параболы 70, 73
Директрисы гиперболы 69
— эллипса 61
Дифференциал 254
— второго порядка 264
— n-го порядка 264
—, правила вычисления 257
Дифференцирование 231
— логарифмической функции 243
— неявной функции 249
— обратной функции 237
— обратных тригонометрических функций 241, 242
— параметрически заданной функции 252
— показательной функции 244
—, правила 233—235
— сложной функции 236
— степенной функции 239
— тригонометрических функций 240, 241
Дифференцируемая функция 231
Длина отрезка 7
Дробная рациональная функция 171
Дробно-линейная функция 173

Единичный вектор 98

Зависимая переменная 166
Зависимость между полярными и прямоугольными координатами 16

Задача о касательной к кривой 229,230
— — скорости прямолинейного движения 228, 229
Знак члена определителя 80, 82
Знаки координат по октантам 77
— — — четвертям 13

Инвариантность формы дифференциала 258
Инверсия 82
Интервал 165
Интервалы монотонности 172
Иррациональная функция 171
Исключение параметра 251
Исследование общего уравнения плоскости 132
— — — прямой 40

Каноническое уравнение двуполостного гиперболоида 155
— — гиперболического параболоида 160
— — гиперболы 63,66
— — однополостного гиперболоида 153
— — параболы 71, 72
— — эллипса 58
— — эллипсоида 150
— — эллиптического параболоида 158
Касательная 229
Квадрант 13
Квадратичная функция 173
Коллинеарные векторы 98
Компланарные векторы 124
Компоненты вектора 115
Конечный разрыв 224
Конус второго порядка 162
Координатные оси 75
Координаты вектора 100
— середины отрезка 25, 105
— точки 9, 11, 75
— центра тяжести треугольника 26
Косеканс 177
Косинус 177
Котангенс 177
Коэффициент обратной пропорциональности 172
— пропорциональности 172
Крамера правило 96

Левосторонний предел 216
Лейбница формула 262
Линейная функция 37, 172
Линейные операции над векторами 107
Линия второго порядка 54
Логарифмика 177
Логарифмическая производная 248
— функция 176
Логарифмическое дифференцирование 248

Малая ось эллипса 59
Мгновенная скорость 229
Механический смысл дифференциала 256
Минор 89, 90
Мнимая ось гиперболы 65
Мнимый конус 163
Многозначная функция 170
Многочлен 171
Модуль вектора 98, 101
Монотонная функция 172

Направленный отрезок 7
Направляющая цилиндрической поверхности 148
Направляющие косинусы 102, 135, 141
— параметры 141
Направляющий вектор прямой 141
Натуральный логарифм 206
Начало координат 9, 11, 75
Независимая переменная 166
Неограниченная функция 189
Непрерывность функции в интервале 221
— — — точке 218, 219
— —, действия над непрерывными функциями 221, 222
— —, свойства непрерывных функций 226, 227
Несравнимые бесконечно малые 211
Нечетная перестановка 82
— функция 171
Неявная функция 170, 249
Нисходящая парабола 73
n-нормаль 49
Нормальный вектор 130
Нормирующий множитель 51, 136
Нулевой вектор 98
— отрезок 7

Область изменения 165
— определения 166
Обобщенная система полярных координат 16
Образующая конуса 162
— цилиндрической поверхности 148, 149
Обратная пропорциональная зависимость 172
— функция 174, 237
Обратные тригонометрические функции 178
Объем треугольной пирамиды 126
Ограниченная последовательность 200
— функция 188
Однозначная функция 170
Однополостный гиперболоид 153
Однородная система уравнений 97
Односторонние пределы 217
Окружность 54
Октант 76

Определитель второго порядка 78
— n-го порядка 82
— — —, свойства 83—88
— системы уравнений 78, 80, 94
— третьего порядка 80
Ордината 75
Орт 98
Основание натуральных логарифмов 206
— логарифмической функции 176
— показательной функции 176
Основная бесконечно малая 211
Основные элементарные функции 175
Ось 7
— абсцисс 11, 75
— аппликат 75
— ординат 11, 75
— параболы 72
Отклонение точки от плоскости 135, 136
— — — прямой 50
Отношение 24
Отрезок 165
Отрицательное направление 7

Парабола 70
Параболический цилиндр 149
Параметр 34, 165
— параболы 70
Параметрические уравнения линии 34
Параметрическое задание функции 251
Параметры параболоида 160, 161
Первый замечательный предел 200
Переменная величина 165
Перестановка 81
Плоскость, *см.* Уравнение плоскости
Площадь треугольника 22
Побочная диагональ определителя 80
Показательная функция 176
Полином 171
Положительное направление 7
Полубесконечный интервал 166
Полуоси гиперболоида 155, 156
— эллипсоида 151
Полюс 14
Полярная ось 14
— система координат 14
Полярные координаты 15
Полярный радиус 15
— угол 15
— — нормали 49
— — отрезка 20
Порядок малости бесконечно малых 210
— поверхности 148
Последовательность 169, 187
Правая система координат 75
Правило параллелограмма 108
Правосторонний предел 216
Предел отношения двух многочленов при $x \to \infty$ 198
— последовательности 187
— функции при $x \to x_0$ 183
— — — $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ и $x \to \infty$ 184, 185
— — $(1+\frac{1}{n})^n$ при $n \to \infty$ 202
— — $(1+\frac{1}{x})^x$ при $x \to \infty$, $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ при $x \to 0$ 205
— — $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$ 200
— —, правила вычисления 194, 195
— —, признаки существования 199, 200
Предельная точка 183
Преобразование прямоугольных координат при изменении начала координат и повороте осей 30
— — — — параллельном сдвиге осей 28
— — — — повороте осей 29
Приближенные вычисления с помощью дифференциала 259, 260
Приведение общего уравнения плоскости к нормальному виду 136
— — — прямой к нормальному виду 50, 51
Признак существования предела последовательности 200
— — — функции 199
— эквивалентности двух бесконечно малых 212
Принцип замены эквивалентными 213
Приращение аргумента 218
— функции 218
Проекция вектора на ось 99
— отрезка на ось 19, 20, 21
Произведение вектора на число 109
Производная 231
— второго порядка 261
— n-го порядка 261
См. также Дифференцирование
Промежуток 165
Противоположные векторы 98, 109
Прямая, *см.* Уравнение прямой
— пропорциональная зависимость 37, 172
Прямоугольные координаты 11
Пучок прямых 38

Равенство векторов 98
Равносторонняя гипербола 67
Радиус-вектор 20
Радиус окружности 54
Разложение вектора на составляющие 115
— определителя по элементам столбца (строки) 91
Разность векторов 109
Расстояние между двумя точками 10, 17, 104
— от точки до плоскости 135, 136
— — — — прямой 50

Рациональная функция 171
Решение системы n линейных уравнений с n неизвестными 94

Свободный вектор 98
Связка плоскостей 138
Секанс 177
Синус 177
Синусоида 178
Система n линейных уравнений с n неизвестными 97
— — — — — — — однородная 97
Скаляр 98
Скалярное произведение 115
— —, свойства 116, 117
Скалярный квадрат 117
Скорость изменения функции 231
— прямолинейного движения 229
Сложение векторов 107, 108
Сложная функция 182, 236
Смешанное произведение 124, 126
Сопряженные гиперболы 66
Составляющие вектора 115
Средняя скорость 228
— — изменения функции 230
Степенная функция 175
Степенно-показательная функция 247
Сумма векторов 107
— членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии 203

Таблица дифференциалов 258
— значений гиперболических функций 209
— — логарифмической и показательной функций 207
— — тригонометрических функций 180
— перевода градусов в радианы 181
— производных 245
Табличный способ задания функции 167
Тангенс 177
Тангенсоида 178
Текущие координаты 32
Теорема о разложении определителя n-го порядка по элементам столбца (строки) 94
— — связи между бесконечно малой и бесконечно большой величиной 193
— — — — — — — — величиной, имеющей предел 189
— — — — дифференцируемостью и непрерывностью 232
Теоремы о действиях над непрерывными функциями 221, 222
— — правилах вычисления пределов 194, 195
— — — дифференцирования 233—235
— — проекциях векторов 111, 112
— — свойствах непрерывных функций 226, 227
Точка пересечения двух линий 33
— — — прямых 45
— — прямой с плоскостью 142, 143
— разрыва 223
— — второго рода 224
— — первого рода 224
Транспозиция 81
Трансцендентная функция 171
Трехосный эллипсоид 151
Тригонометрические функции 177

Убывающая функция 172
Угловой коэффициент прямой 36
Угол между двумя векторами 118
— — — плоскостями 139
— — — прямыми 42, 144
— — прямой и плоскостью 146
— наклона вектора к оси 99
— — прямой к оси Ox 35
Умножение вектора на число 110
Уравнение линии 32, 34
— плоскости в отрезках 134
— — нормальное 135
— — общее 130, 132
— —, проходящей через три данные точки 138
— поверхности 128
— прямой в отрезках 41
— — — полярных координатах 53
— — нормальное 49, 50
— — общее 39, 40
— —, параллельной оси Oy 38
— —, проходящей через две данные точки 38
— — с угловым коэффициентом 37
— пучка прямых 47, 48
— связки плоскостей 138
См. также Каноническое уравнение
Уравнения линии в пространстве 140, 141
— прямой как линии пересечения двух плоскостей 141
— — канонические 141, 143
— — параметрические 142
Условие коллинеарности двух векторов 113
— компланарности трех векторов 125, 126
— параллельности двух плоскостей 140
— — — прямых 43, 144
— — прямой и плоскости 146
— перпендикулярности двух векторов 117
— — — плоскостей 139
— — — прямых 44, 144
— — прямой и плоскости 146, 147
— принадлежности трех точек одной прямой 22
— совпадения двух плоскостей 131
— — — прямых 46
— существования дифференциала 256, 257
Устранимый разрыв 224

Фокальная ось гиперболы 64, 65
— — эллипса 58
Фокальный радиус точки гиперболы 62
— — — параболы 70
— — — эллипса 56, 57
Фокус параболы 70
Фокусы гиперболы 62
— эллипса 56
Формула общего члена последовательности 187
Функциональная зависимость 166
Функция 166
— целочисленного аргумента 169

Целая рациональная функция 171
Целочисленный аргумент 169
Центр гиперболы 64
— окружности 54
— пучка прямых 38
— эллипса 59
Цилиндрическая поверхность 129, 130, 148

Частное значение функции 169
Четверть 13
Четная перестановка 82
— функция 171
Число e 204
Числовая ось 10
Член определителя 78, 82
— последовательности 187

Эквивалентные бесконечно малые 212
Экспонента 176, 208
Экспоненциальная функция 176, 208
Эксцентриситет гиперболы 67, 68
— эллипса 59, 60
Элемент определителя 78, 80, 82
Элементарная функция 182
Эллипс 56
Эллипсоид 150, 151
Эллиптический параболоид 159
— цилиндр 149

Явная функция 170

Наум Михайлович Меламедман

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

для техников программистов
ч. I

Редактор Ж. И. Яковлева. Художник Л. Г. Бакушева. Художественный редактор В. И. Пономаренко. Технический редактор Э. М. Чижевский. Корректор С. К. Марченко

Сдано в набор 18/I-74 г. Подп. к печати 21/V-74 г.
Формат 60×90¹/₁₆. Бум. тип. № 3. Объем 17 печ. л. Усл. п. л. 17.
Уч.-изд. л. 15,66. Изд. № ФМ-516а Тираж 30 000 экз. Цена 63 коп.
План выпуска литературы для вузов и техникумов издательства
«Высшая школа» на 1974 г. Позиция № 248
Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14,
издательство «Высшая школа»

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Союзполиграфпрома при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли
Москва, М-54, Валовая, 28. Зак. 1174